

Michal Kvasnica

Elektronický učebný text a materiály pre
predmety Optimalizácia a Optimalizácia
procesov a výrob

Fakulta chemickej a potravinárskej technológie
Slovenská technická univerzita v Bratislave
Bratislava
2021

Slovenská technická univerzita v Bratislave
Fakulta chemickej a potravinárskej technológie
Ústav informatizácie, automatizácie a matematiky

Elektronický učebný text a materiály pre
predmety Optimalizácia a Optimalizácia
procesov a výrob

Michal Kvasnica

Vydavateľstvo FCHPT
Bratislava, 2021
ISBN 978-80-8208-052-3

Tento učebný text je odporúčaný študentom bakalárskeho a inžinierskeho štúdia so zameraním na automatizáciu a riadenie procesov, ako i širokej verejnosti, ktorá má záujem zvládnuť základné i pokročilejšie koncepty statickej optimalizácie a optimalizačných algoritmov.

Všetky práva vyhradené. Nijaká časť textu nesmie byť použitá na ďalšie šírenie akoukoľvek formou bez predchádzajúceho súhlasu autora alebo vydavateľstva.

© doc. Ing. Michal Kvasnica, Dr.sc.
Vydanie prvé
ISBN 978-80-8208-052-3

Obsah

Úvod	1
Úvod do optimalizácie	3
Zápis optimalizačných problémov	5
Konvexné, konkávne a nekonvexné funkcie	7
Analytická metóda hľadania optima	12
Extrémy mnohorozmerných funkcií	15
Fitovanie so všeobecnými bázickými funkciami	30
Extrémy funkcií s ohraničeniami v tvare rovnosti	34
Metóda Lagrangeových násobičov	43
Extrémy funkcií s ohraničeniami v tvare nerovnosti	55
Ilustračné príklady	68
Lineárne programovanie a simplexová metóda	87
Prekvapenia simplexovej metódy	114
Kvadratické programovanie a jeho aplikácie	144
Separácia a klasifikácia	154
Základné matematické pojmy a definície	164
Zoznam literatúry	174

Úvod

Optimalizáciou rozumieme proces hľadania najlepšieho riešenia danej úlohy. Takéto najlepšie riešenie voláme optimálne. Optimalizačná úloha sa pritom skladá z účelovej funkcie a voliteľných ohraničení, ktoré vymedzujú priestor, v rámci ktorého hľadáme optimálne riešenie. Optimalizácia nám pritom umožňuje nájsť najvhodnejšie správanie sa daného systému či procesu, ktorým môže byť napríklad chemický reaktor, destilačná kolóna, bioreaktor, výmenník tepla, či iný proces bežne používaný chemických a potravinárskych technológiách.

Optimalizácia je v súčasnosti veľmi pertraktovaná oblasť, keďže umožňuje zvýšiť ekonomickú efektivitu priemyselných prevádzok pri dodržaní bezpečnostných kritérií. Preto je dôležité vedieť optimalizačné úlohy správne formulovať, riešiť a interpretovať výsledky riešenia. Každú úlohu je totiž možné formulovať roznoymi spôsobmi a používateľ optimalizačných techník by sa vždy mal snažiť zvoliť taký spôsob, ktorý je pre danú úlohu najvhodnejší.

Tento učebný text ponúka základný prehľad optimalizačných úloh a algoritmov na ich riešenie z pohľadu študenta bakalárskeho a inžinierskeho štúdia so zameraním na automatizáciu a riadenie procesov chemickej a potravinárskej technológie. Nájde však aj využitie v iných oblastiach, napríklad pri optimalizácii energetických či mechanických systémov. Čitateľ v texte nájde vysvetlenie matematickej formulácie rôznych optimalizačných problémov od najjednoduchších až po veľmi komplexné. Každá trieda úloh je pritom ilustrovaná názornými príkladmi na jej lepšie pochopenie. Učebný text pritom ponúka prehľad riešenia optimalizačných úloh bez ohraničení, s ohraničeniami v tvare rovnosti a s ohraničeniami v tvare nerovnosti. Pre každý typ úlohy je prezentovaných viacero algoritmov, pričom sú ilustrované ich silné a slabé stránky. Tento učebný text taktiež ponúka prehľad praktických úloh, ktoré sú formulovateľné a riešiteľné ako optimalizačné úlohy, od fitovacích problémov, cez ekonomické a logistické úlohy, až po úlohy separácie a klasifikácie.

Tento učebný text je spracovaný formou snímkov, ktoré autor prezentoval v rámci prednášok z predmetov Optimalizácia a Optimalizácia procesov a výroby na FCHPT STU v

Bratislave v akademicckých rokoch 2014/2015 až 2020/2021 a je rozdelený do 15 hlavných kapitol. V každej kapitole čitateľ nájde definíciu vysvetľovaného problému, jeho teoretické riešenie, ako i ilustratívne aj praktické príklady využitia danej metódy. Posledná kapitola je spracovaná v textovej podobe, pričom sú v nej zhrnuté základné matematické definície, vety a postupy využívané v predošlých kapitolách.

Čitateľom autor želá hlavne veľa odhodlania pri prvých krokoch v spoznávaní optimalizácie a optimalizačných algoritmov. Nech sa nenechá odradiť matematickou podstatou pojednáwanej oblasti - tá k nej nevyhnutne patrí. Čitateľ si však vystačí so základnými znalosťami z oblasti matematiky, akými sú napr. derivácie.

Autor.

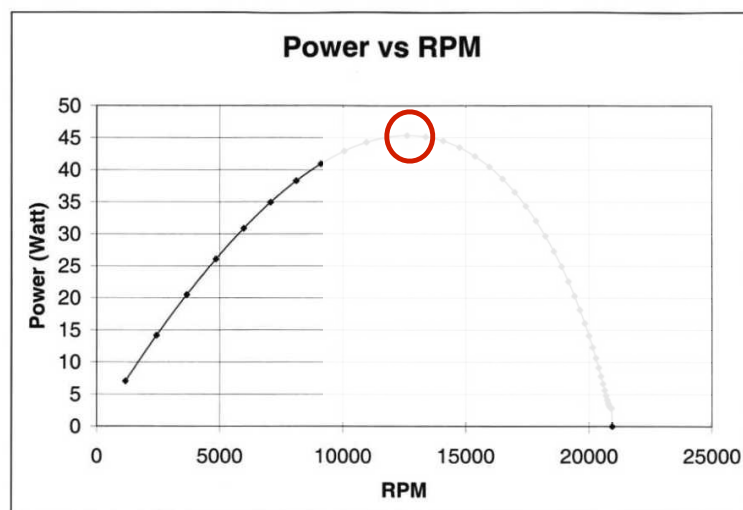
Optimalizácia

Michal Kvasnica

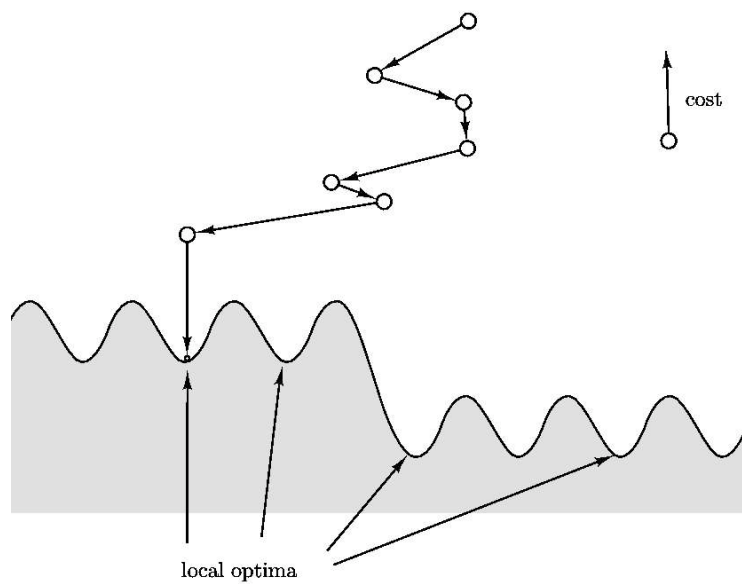
Optimalizácia

Optimalizácia = hľadanie najlepšieho (optimálneho) riešenia

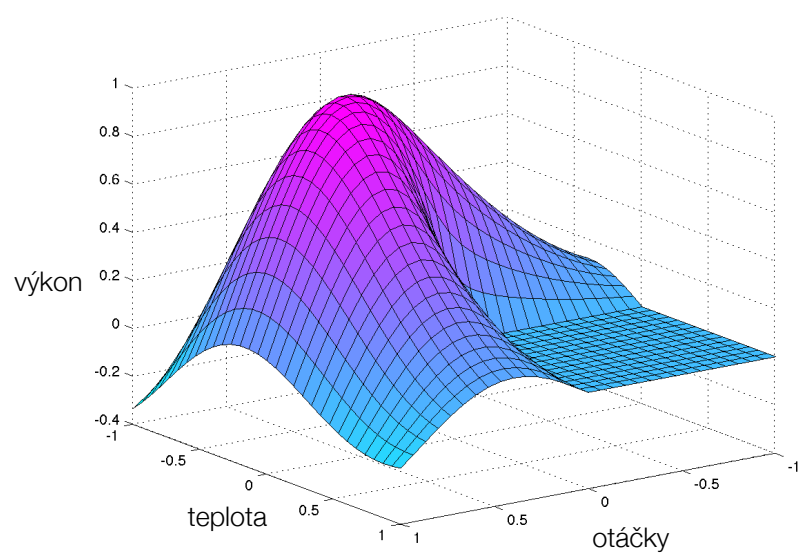
Optimálne vs. ~~neoptimálne~~



1D příklad



2D příklad



Všeobecný zápis optimalizačních problémů

hodnota
účelové funkce
v optime

účelová
funkcia

$$J^* = \min f(x)$$

$$\text{s.t. } x \in \mathbb{X}$$

ohraničenia

Všeobecný zápis optimalizačních problémů

optimálne
riešenie

účelová
funkcia

$$x^* = \arg \min f(x)$$

$$\text{s.t. } x \in \mathbb{X}$$

ohraničenia

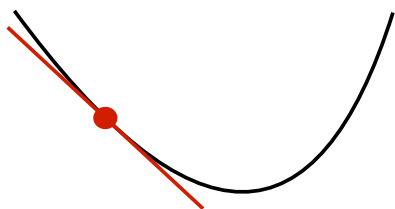
Klasifikácia optimalizačných problémov

	Jednoduché	Zložité
Rozhodovacie premenné	spojité	diskrétné
Ohraničenia	žiadne konvexné	nekonvexné
Účelová funkcia	konvexná	nekonvexná

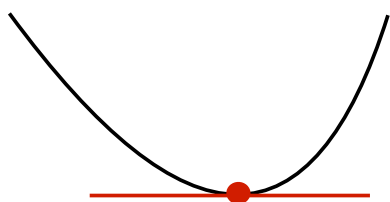
Klasifikácia optimalizačných problémov

	Jednoduché	Zložité
Rozhodovacie premenné	spojité	diskrétné
Ohraničenia	žiadne konvexné	nekonvexné
Účelová funkcia	konvexná	nekonvexná

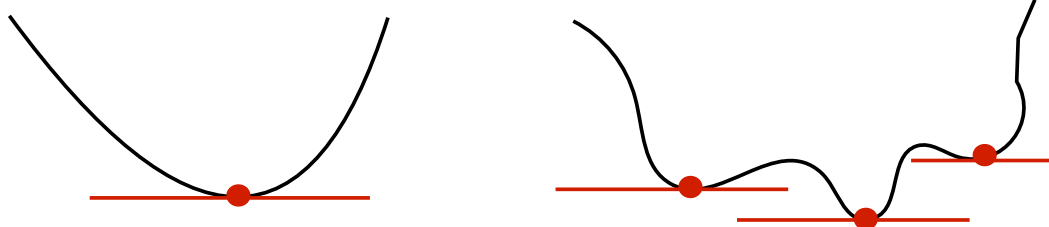
Konvexná vs nekonvexná funkcia



Konvexná vs nekonvexná funkcia

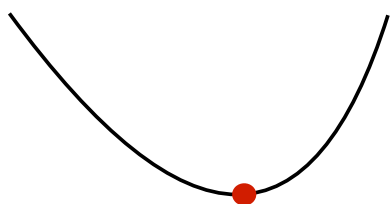


Konvexná vs nekonvexná funkcia



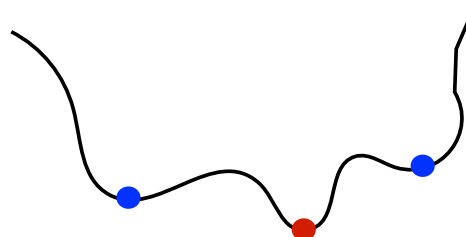
Konvexná vs nekonvexná funkcia

konvexná



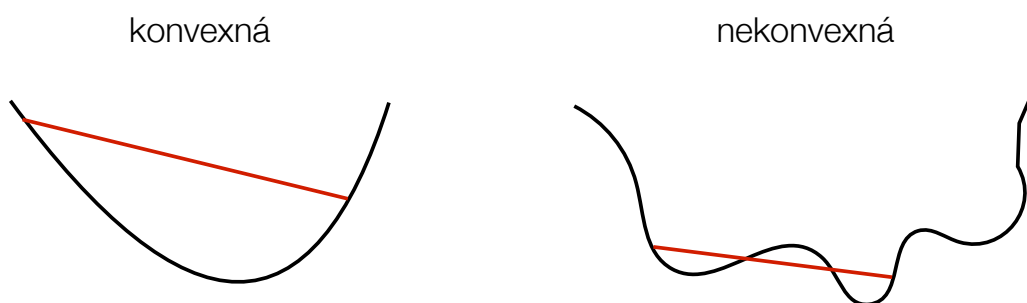
každé minimum je globálne

nekonvexná

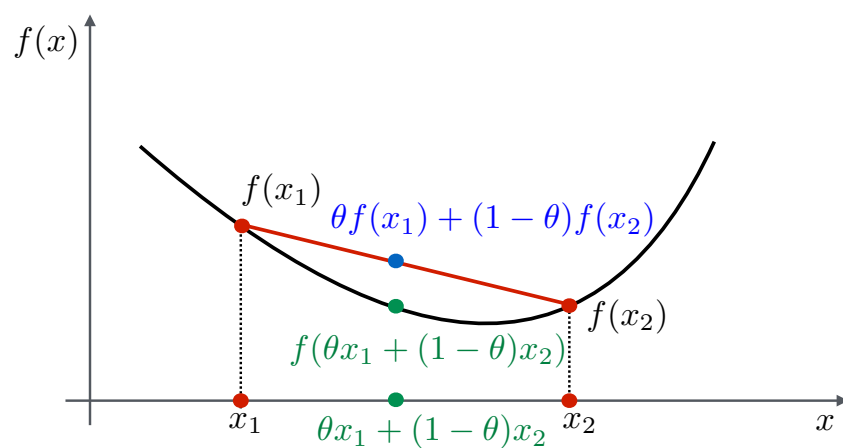


globálne vs lokálne minimum

Konvexná vs nekonvexná funkcia

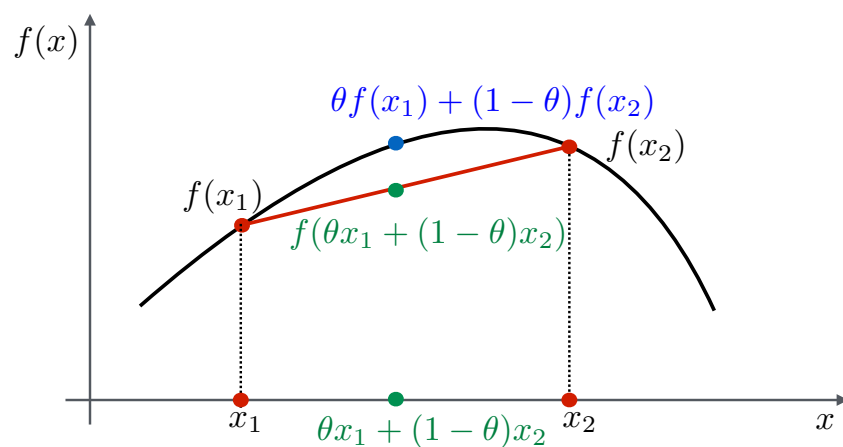


Konvexnosť funkcie



$$f(\theta x_1 + (1 - \theta)x_2) \leq \theta f(x_1) + (1 - \theta)f(x_2)$$
$$\forall \theta \in [0, 1]$$

Konkávna funkcia



$$f(\theta x_1 + (1 - \theta)x_2) \geq \theta f(x_1) + (1 - \theta)f(x_2)$$

$$\forall \theta \in [0, 1]$$

Príklady konvexných a konkávnych funkcií

Konvexné:

- afinná funkcia: $ax+b$
- exponent: e^{ax}
- mocnina: x^a na R_{++} pre $a \geq 1$

Konkávne:

- afinná funkcia: $ax+b$
- logaritmus: $\log x$ na R_{++}
- mocnina: x^a na R_{++} pre $0 \leq a \leq 1$

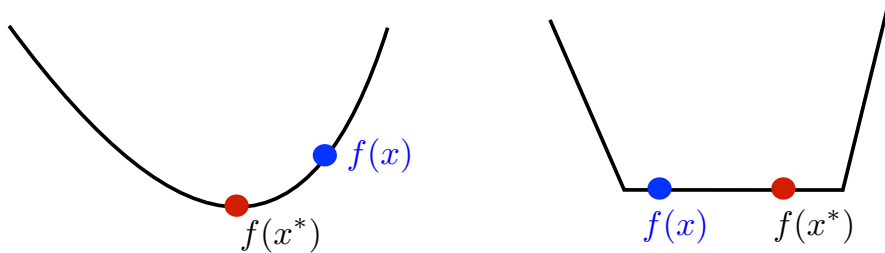
Ostré vs neostré minimum

Funkcia má v bode x^* **ostré lokálne minimum**, ak existuje $\delta > 0$ také, že pre každé x spĺňajúce $|x - x^*| < \delta$ platí, že

$$f(x) > f(x^*)$$

O **neostrom lokálnom minime** hovoríme, ak platí

$$f(x) \geq f(x^*)$$



Neohraničená minimalizácia konvexnej 1D funkcie

$$J^* = \min f(x) \\ \text{s.t. } x \in \mathbb{R}$$

Analytické riešenie

- pomocou derivácií

Numerické riešenie

- gradientové metódy
- Newtonova metóda
- metóda vnútorného bodu

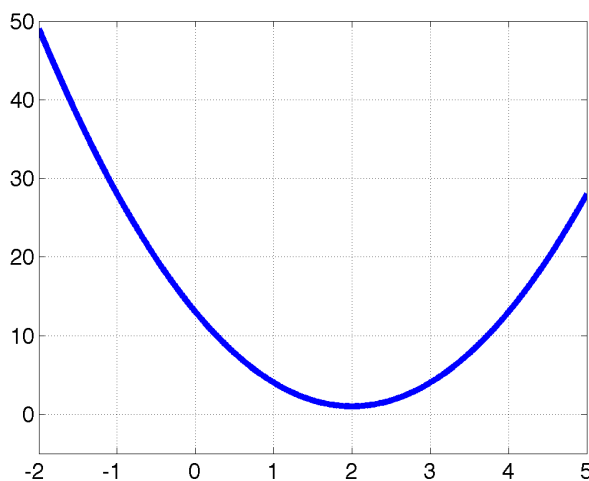
Analytická metóda hľadania optima

Predpoklad: funkcia $f(x)$ je dvakrát spojitě diferencovateľná

Potom:

- ak $f'(x^*)=0$ a $f''(x^*)>0$, potom x^* je ostré lokálne minimum
- ak $f'(x^*)=0$ a $f''(x^*)<0$, potom x^* je ostré lokálne maximum

Príklad: $f(x) = 3(x-2)^2 + 1$



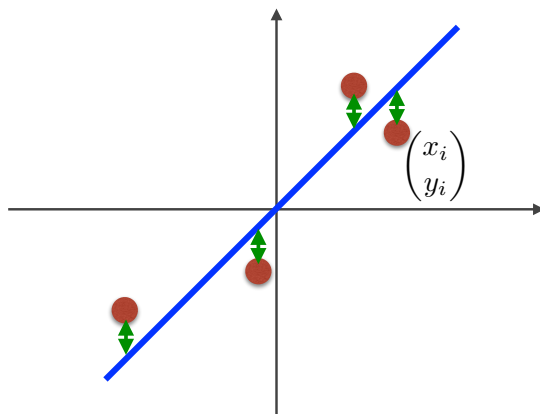
$$\begin{aligned}f'(x) &= 6(x-2) = 0 \\x^*-2 &= 0 \\x^* &= 2\end{aligned}$$

minimum,
maximum?

$$f''(x^*) = 6 > 0$$

minimum!

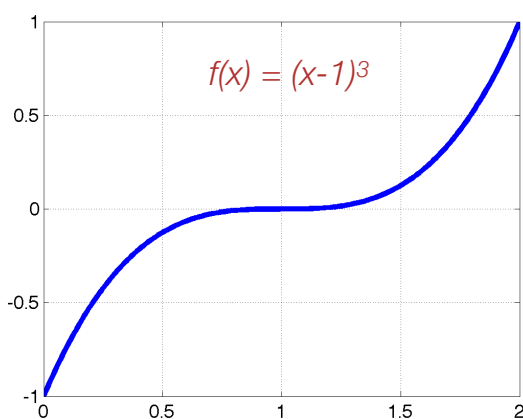
Fit dát lineárnou funkciou $y=ax$



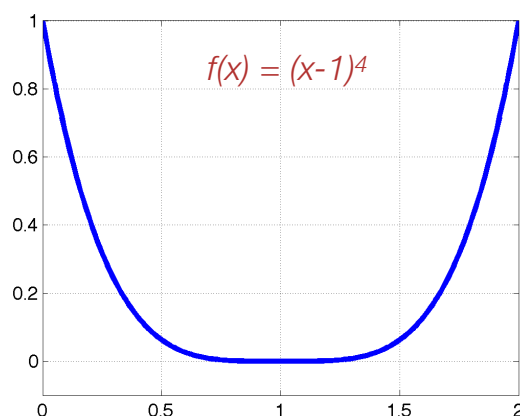
$$\begin{aligned} a^* &= \arg \min \sum_i (ax_i - y_i)^2 \\ &= \arg \min (\sum_i x_i^2) a^2 - 2(\sum_i x_i y_i) a + \sum_i y_i^2 \\ &= \arg \min \gamma_2 a^2 - 2\gamma_1 a + \gamma_0 \\ &= \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \end{aligned}$$

Analytická metóda hľadania optima

Predpoklad: $f''(x^*)=0$



$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(x-1)^2 = 0 \\ x^* &= 1 \\ f''(x^*) &= 6x^* - 6 = 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} f'(x) &= 4(x-1)^3 = 0 \\ x^* &= 1 \\ f''(x^*) &= 12(x^*-1)^2 = 0 \end{aligned}$$

Analytická metóda hľadania optima

Predpoklad: $f''(x^*)=0$

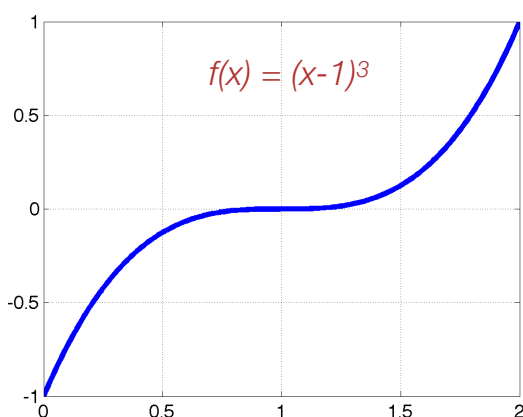
Nech existuje n také, že pre každé $k < n$ je $f^{(k)}(x^*)=0$ a $f^{(n)}(x^*) \neq 0$

Potom:

- ak n je **párne** a $f^{(n)}(x^*) > 0$, potom x^* je ostré lokálne **minimum**
- ak n je **párne** a $f^{(n)}(x^*) < 0$, potom x^* je ostré lokálne **maximum**
- ak n je **nepárne**, potom má funkcia v bode x^* **inflexný bod**

Analytická metóda hľadania optima

Predpoklad: $f''(x^*)=0$



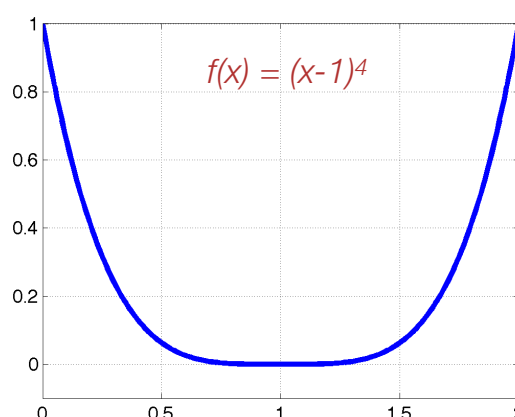
$$f'(x) = 3(x-1)^2 = 0$$

$$x^* = 1$$

$$f''(x^*) = 6x^* - 6 = 0$$

$$f'''(x^*) = 6$$

inflexný
bod



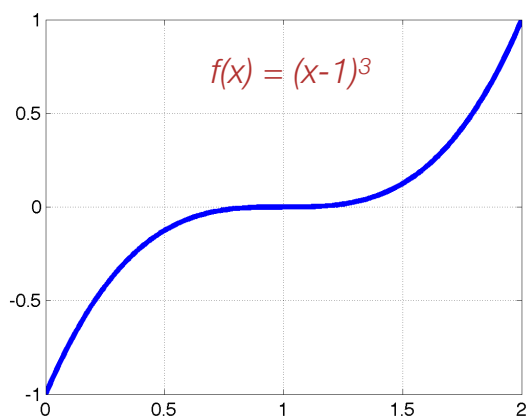
$$f'(x) = 4(x-1)^3 = 0$$

$$x^* = 1$$

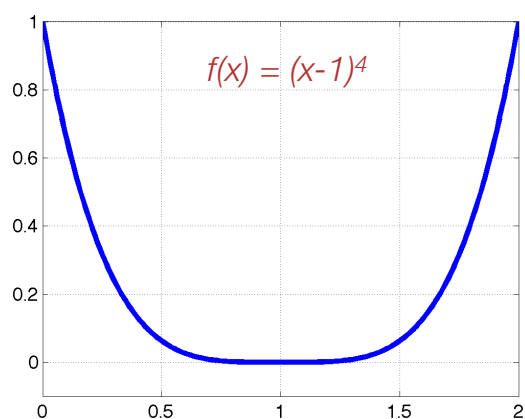
$$f''(x^*) = 12(x^*-1)^2 = 0$$

Analytická metóda hľadania optima

Predpoklad: $f''(x^*)=0$



$$\begin{aligned}f'(x) &= 3(x-1)^2 = 0 \\x^* &= 1 \\f''(x^*) &= 6x^* - 6 = 0 \\f'''(x^*) &= 6\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}f'(x) &= 4(x-1)^3 = 0 \\x^* &= 1 \\f''(x^*) &= 12(x^*-1)^2 = 0 \\f'''(x^*) &= 24x^* - 24 = 0 \\f^{(4)}(x^*) &= 24\end{aligned}$$

min

Extrémy mnohorozmerových funkcií

Michal Kvasnica

Neohraničená minimalizácia konvexnej 1D funkcie

$$J^* = \min f(x) \\ \text{s.t. } x \in \mathbb{R}$$

Analytické riešenie

- pomocou derivácií

Numerické riešenie

- gradientové metódy
- Newtonova metóda
- metóda vnútorného bodu

Analytická metóda hľadania optima

Predpoklad: funkcia $f(x)$ je dvakrát spojitely diferencovateľná

Potom:

- ak $f'(x^*)=0$ a $f''(x^*)>0$, potom x^* je ostré lokálne minimum
- ak $f'(x^*)=0$ a $f''(x^*)<0$, potom x^* je ostré lokálne maximum

Analytická metóda hľadania optima

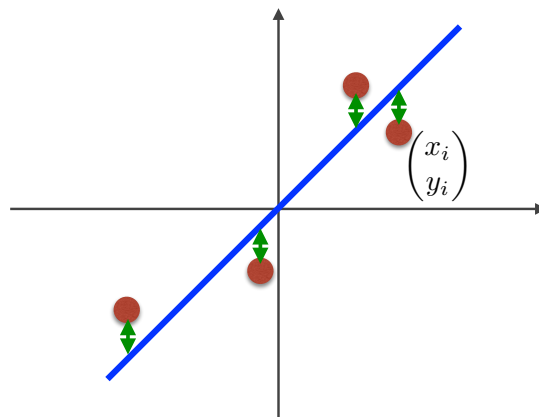
Predpoklad: $f''(x^*)=0$

Nech existuje n také, že pre každé $k < n$ je $f^{(k)}(x^*)=0$ a $f^{(n)}(x^*) \neq 0$

Potom:

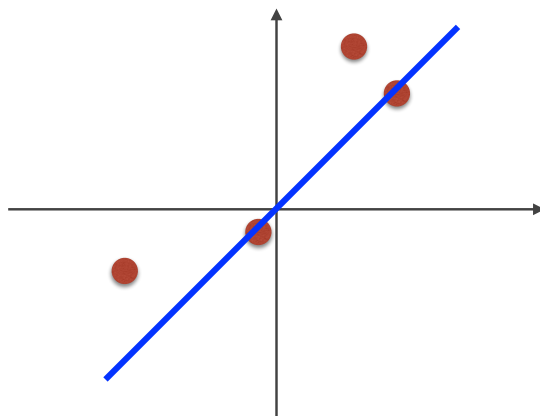
- ak n je **párne** a $f^{(n)}(x^*) > 0$, potom x^* je ostré lokálne **minimum**
- ak n je **párne** a $f^{(n)}(x^*) < 0$, potom x^* je ostré lokálne **maximum**
- ak n je **nepárne**, potom má funkcia v bode x^* **inflexný bod**

Fit dát lineárnou funkciou $y=ax$

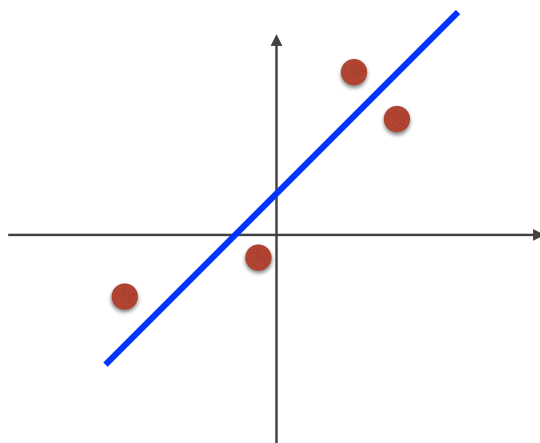


$$\begin{aligned} a^* &= \arg \min \sum_i (ax_i - y_i)^2 \\ &= \arg \min (\sum_i x_i^2) a^2 - 2(\sum_i x_i y_i) a + \sum_i y_i^2 \\ &= \arg \min \gamma_2 a^2 - 2\gamma_1 a + \gamma_0 \\ &= \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \end{aligned}$$

Fit dát afinnou funkcíou $y=ax+b$



Fit dát afinnou funkcíou $y=ax+b$



$$\min_{a,b} \sum_i ((ax_i + b) - y_i)^2$$

$$f(a,b) = \underbrace{(\sum_i x_i^2)}_{\gamma_1} a^2 + \underbrace{(\sum_i x_i)}_{\gamma_2} ab - \underbrace{2(\sum_i x_i y_i)}_{\gamma_3} a - \underbrace{2(\sum_i y_i)}_{\gamma_4} b + \underbrace{m}_{\gamma_5} b^2 + \underbrace{(\sum_i y_i^2)}_{\gamma_6}$$

$$= \gamma_1 a^2 + \gamma_2 ab + \gamma_3 a + \gamma_4 b + \gamma_5 b^2 + \gamma_6$$

Optimum funkcie dvoch premenných

Predpoklad: funkcia $f(x,y)$ je dvakrát spojitě diferencovatelná:

gradient

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial y} \end{bmatrix}$$

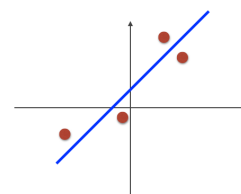
Hesián

Potom:

- ak $\nabla f(x^*, y^*) = 0$ a $\nabla^2 f(x^*, y^*)$ je **kladne definitný**, potom (x^*, y^*) je ostré lokálne minimum
- ak $\nabla f(x^*, y^*) = 0$ a $\nabla^2 f(x^*, y^*)$ je **záporne definitný**, potom (x^*, y^*) je ostré lokálne maximum
- ak $\nabla f(x^*, y^*) = 0$ a $\nabla^2 f(x^*, y^*)$ je **indefinitný**, potom (x^*, y^*) je sedlový bod

Fit dát afinnou funkciou $y=ax+b$

$$f(a, b) = \gamma_1 a^2 + \gamma_2 ab + \gamma_3 a + \gamma_4 b + \gamma_5 b^2 + \gamma_6$$



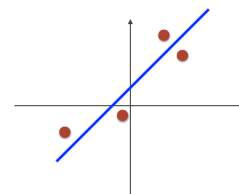
$$\nabla f(a, b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(a,b)}{\partial a} \\ \frac{\partial f(a,b)}{\partial b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\gamma_1 a + \gamma_2 b + \gamma_3 \\ \gamma_2 a + 2\gamma_5 b + \gamma_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2\gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & 2\gamma_5 \end{bmatrix}}_M \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_z = \underbrace{\begin{bmatrix} -\gamma_3 \\ -\gamma_4 \end{bmatrix}}_m$$

$$Mz = m$$

$$z = M^{-1}m$$

Fit dát afinnou funkciou $y=ax+b$



$$f(a, b) = \gamma_1 a^2 + \gamma_2 ab + \gamma_3 a + \gamma_4 b + \gamma_5 b^2 + \gamma_6$$

$$\nabla f(a, b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(a, b)}{\partial a} \\ \frac{\partial f(a, b)}{\partial b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\gamma_1 a + \gamma_2 b + \gamma_3 \\ \gamma_2 a + 2\gamma_5 b + \gamma_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\nabla^2 f(a, b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(a, b)}{\partial a \partial a} & \frac{\partial f(a, b)}{\partial a \partial b} \\ \frac{\partial f(a, b)}{\partial b \partial a} & \frac{\partial f(a, b)}{\partial b \partial b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & 2\gamma_5 \end{bmatrix}$$

Kladne definitná matica

Symetrická matica M je kladne definitná vtedy a len vtedy ak

- všetky jej vlastné čísla sú kladné
- všetky jej hlavné subdeterminanty sú kladné

Vlastné čísla matice M sú korene rovnice **$\det(sI - M) = 0$**

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_2 & m_3 \end{bmatrix}$$

$$(sI - M) = \begin{bmatrix} s - m_1 & -m_2 \\ -m_2 & s - m_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(sI - M) &= (s - m_1)(s - m_3) - (-m_2)^2 \\ &= s^2 - (m_1 + m_3)s + m_1 m_3 - m_2^2 \end{aligned}$$

Test: ktorá matica je kladne definitná?

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 \\ 1.5 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{eig}(M) = \{0.5, 5.5\} \quad \checkmark$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{eig}(M) = \{0, 5\} \quad \times$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1.5 \\ -1.5 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{eig}(M) = \{0.5, 5.5\} \quad \checkmark$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{eig}(M) = \{-2, 4\} \quad \times$$

Kladne definitná matica

Symetrická matica M je kladne definitná vtedy a len vtedy ak

- všetky jej vlastné čísla sú kladné
- všetky jej hlavné subdeterminanty sú kladné

Hlavné subdeterminanty = determinanty matíc $M_{k \times k}$

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ m_2 & m_4 & m_5 \\ m_3 & m_5 & m_6 \end{bmatrix}$$

Test: ktorá matica je kladne definitná?

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 \\ 1.5 & 5 \end{bmatrix} \quad 1, 5-2.25 \quad \checkmark$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad 1, 4-4 \quad \times$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1.5 \\ -1.5 & 5 \end{bmatrix} \quad 1, 5-2.25 \quad \checkmark$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad 1, 1-9 \quad \times$$

Záporne definitná matica

Symetrická matica M je záporne definitná vtedy a len vtedy ak

- matica $-M$ je kladne definitná
- všetky jej vlastné čísla sú záporné
- hodnoty hlavných subdeterminantov **striedajú znamienka**, ale **prvý je záporný**

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ m_2 & m_4 & m_5 \\ m_3 & m_5 & m_6 \end{bmatrix}$$

$$\underline{|M_{1 \times 1}|} < 0, \quad \underline{|M_{2 \times 2}|} > 0, \quad \underline{|M_{3 \times 3}|} < 0$$

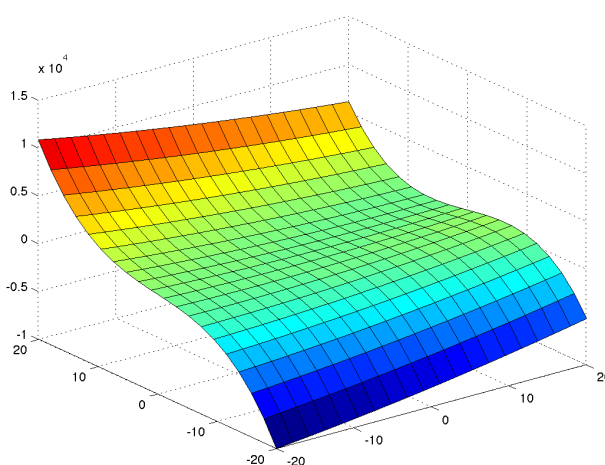
Test: ktorá matica je záporne definitná?

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad |M_{1 \times 1}| = -1, |M_{2 \times 2}| = -18, |M_{3 \times 3}| = -14 \quad \text{✗}$$

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad |M_{1 \times 1}| = -1, |M_{2 \times 2}| = 2, |M_{3 \times 3}| = -2 \quad \text{✓}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad |M_{1 \times 1}| = 1, |M_{2 \times 2}| = -4, |M_{3 \times 3}| = 8 \quad \text{✗}$$

Príklad: $f(x, y) = x^2 + y^3 - 6xy$



Príklad: $f(x, y) = x^2 + y^3 - 6xy$

1 $\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 2x - 6y \\ 3y^2 - 6x \end{bmatrix}$

2 $2x - 6y = 0 \Rightarrow x = 3y$
 $3y^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3y^2 - 18y = 0$
 $\Rightarrow 3y(y - 6) = 0$
 $\Rightarrow y_1 = 0, y_2 = 6$
 $\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 18$

3 $\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 6y \end{bmatrix}$

4 $\nabla^2 f(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \quad \nabla^2 f(18, 6) = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 36 \end{bmatrix}$

Analytická metóda hľadania optima

Predpoklad: funkcia $f(x, y)$ je dvakrát spojitě diferencovateľná:

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{bmatrix} \quad \nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial y} \end{bmatrix}$$

Potom:

- ak $\nabla f(x^*, y^*) = 0$ a $\nabla^2 f(x^*, y^*)$ je **kladne definitný**, potom (x^*, y^*) je ostré lokálne minimum
- ak $\nabla f(x^*, y^*) = 0$ a $\nabla^2 f(x^*, y^*)$ je **záporne definitný**, potom (x^*, y^*) je ostré lokálne maximum
- ak $\nabla f(x^*, y^*) = 0$ a $\nabla^2 f(x^*, y^*)$ je **indefinitný**, potom (x^*, y^*) je sedlový bod

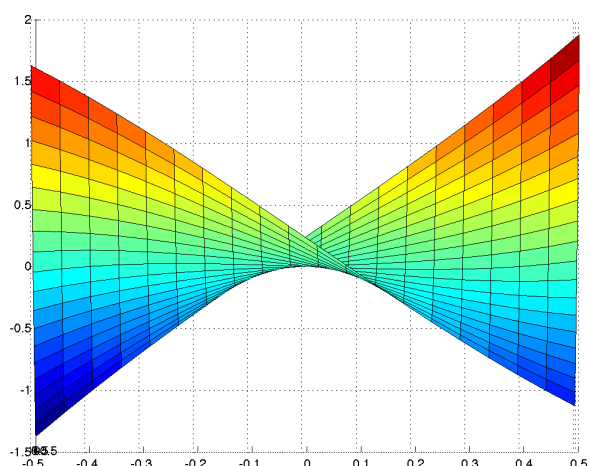
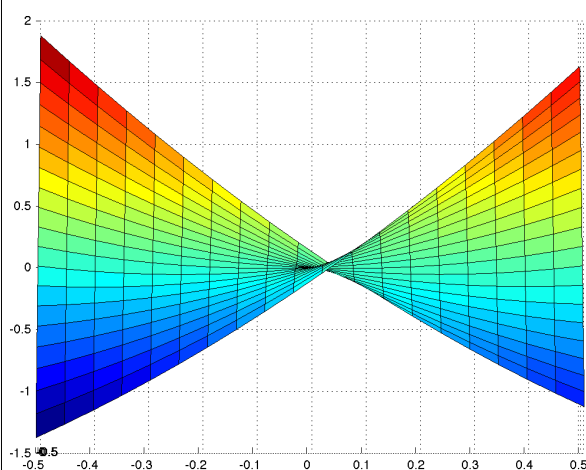
$$x^* = 0, y^* = 0$$

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ m_2 & m_4 & m_5 \\ m_3 & m_5 & m_6 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |M_{1 \times 1}| = 2, |M_{2 \times 2}| = 0 - 6^2 = -36$$

Hesián je **indefinitný** $\Rightarrow$ v bode $(0, 0)$ má funkcia **sedlový bod**

$$x^* = 0, y^* = 0$$



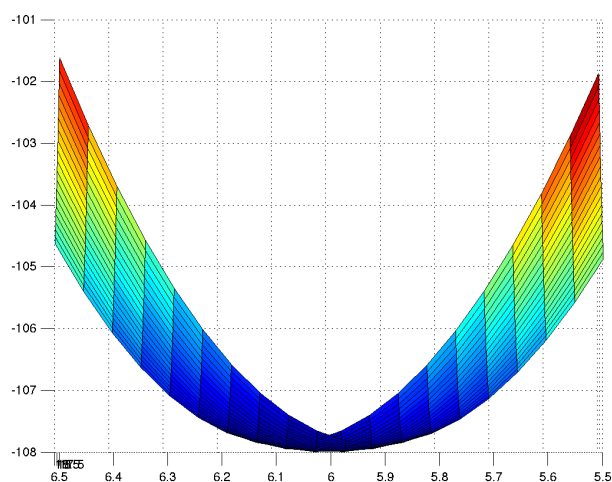
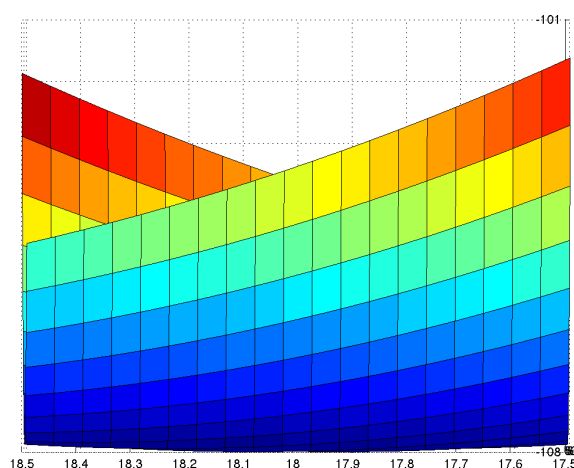
$$x^* = 18, y^* = 6$$

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ m_2 & m_4 & m_5 \\ m_3 & m_5 & m_6 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(18, 6) = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 36 \end{bmatrix} \Rightarrow |M_{1 \times 1}| = 72, |M_{1 \times 1}| = 72 - 6^2 = 36$$

Hesián je **kladne definitný** $\Rightarrow$ v bode (18, 6) má funkcia **minimum**

$$x^* = 18, y^* = 6$$



Viacrozmerové funkcie $f(x_1, \dots, x_n)$

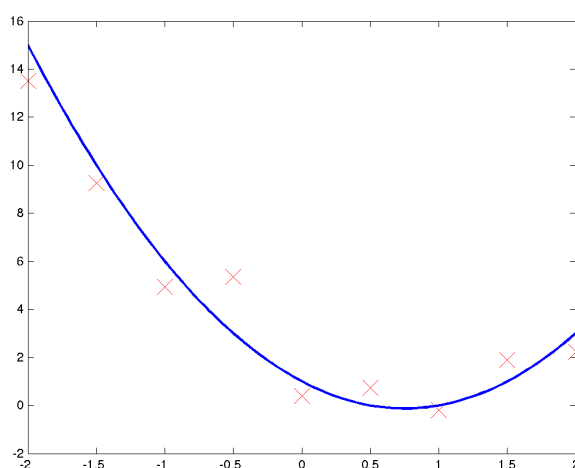
Potom:

- ak $\nabla f(x^*) = 0$ a $\nabla^2 f(x^*)$ je **kladne definitný**, potom x^* je ostré lokálne minimum
- ak $\nabla f(x^*) = 0$ a $\nabla^2 f(x^*)$ je **záporne definitný**, potom x^* je ostré lokálne maximum
- ak $\nabla f(x^*) = 0$ a $\nabla^2 f(x^*)$ je **indefinitný**, potom x^* je sedlový bod

$$\nabla f(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Príklad: fit dát funkciou $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$



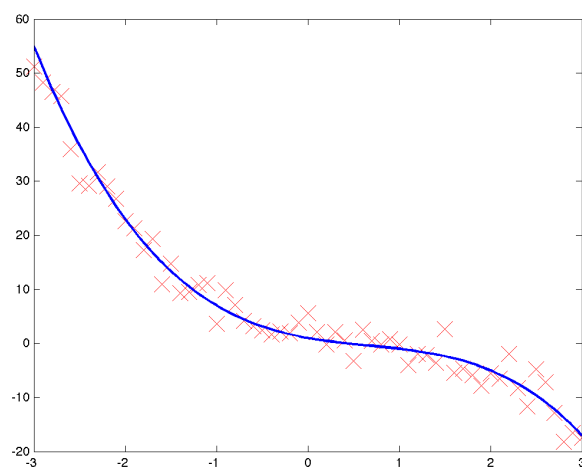
$$\min \sum ((a_2 x_i^2 + a_1 x_i + a_0) - y_i)^2$$

Príklad: fit dát funkciou $y=a_2x^2+a_1x+a_0$

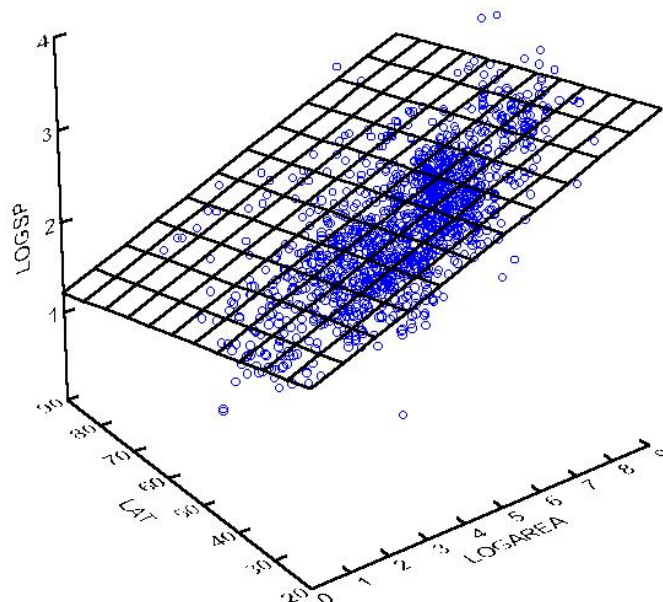
$$\begin{aligned} & ((a_2x_i^2 + a_1x_i + a_0) - y_i)^2 = \\ & = a_2^2x_i^4 + a_1a_2(2x_i^3) + a_0a_2(2x_i^2) + a_2x_i^2y_i + a_1^2x_i^2 + \dots \\ & \quad + a_1a_0(2x_i) - a_1x_iy_i + a_0^2 - a_0y_i \\ & = \gamma_{2,2}a_2^2 + \gamma_{1,2}a_1a_2 + \gamma_{0,2}a_0a_2 + \gamma_2a_2 + \gamma_{1,1}a_1^2 + \dots \\ & \quad + \gamma_{1,0}a_1a_0 + \gamma_1a_1 + a_0^2 + \gamma_0a_0 \end{aligned}$$

$$\nabla = \begin{bmatrix} \gamma_{0,2}a_2 + \gamma_{1,0}a_1 + 2a_0 + \gamma_0 \\ \gamma_{1,2}a_2 + 2\gamma_{1,1}a_1 + \gamma_{1,0}a_0 + \gamma_1 \\ 2\gamma_{2,2}a_2 + \gamma_{1,2}a_1 + \gamma_{0,2}a_0 + \gamma_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & \gamma_{1,0} & \gamma_{0,2} \\ \gamma_{1,0} & 2\gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} \\ \gamma_{0,2} & \gamma_{1,2} & 2\gamma_{2,2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\gamma_0 \\ -\gamma_1 \\ -\gamma_2 \end{bmatrix}$$

Rozšírenie: fit dát polynómom



Rozšírenie: fit 2D dát afinnou funkciou $y=a^T x+b$



Príklad: fit dát funkciou $y=a_2x^2+a_1x+a_0$

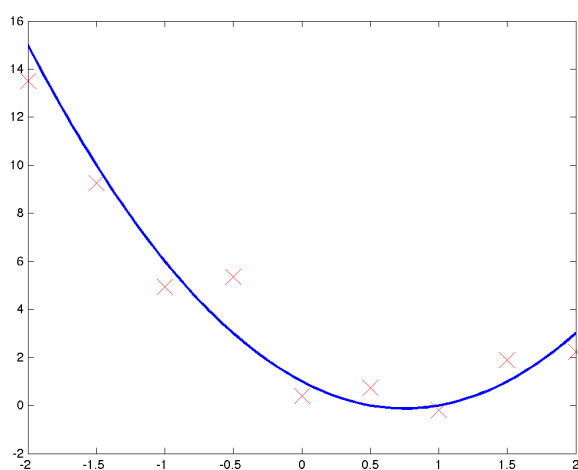
$$\begin{aligned}
 & ((a_2x_i^2 + a_1x_i + a_0) - y_i)^2 = \\
 & = a_2^2x_i^4 + a_1a_2(2x_i^3) + a_0a_2(2x_i^2) + a_2x_i^2y_i + a_1^2x_i^2 + \dots \\
 & \quad + a_1a_0(2x_i) - a_1x_iy_i + a_0^2 - a_0y_i \\
 & = \gamma_{2,2}a_2^2 + \gamma_{1,2}a_1a_2 + \gamma_{0,2}a_0a_2 + \gamma_2a_2 + \gamma_{1,1}a_1^2 + \dots \\
 & \quad + \gamma_{1,0}a_1a_0 + \gamma_1a_1 + a_0^2 + \gamma_0a_0
 \end{aligned}$$

$$\nabla = \begin{bmatrix} \gamma_{0,2}a_2 + \gamma_{1,0}a_1 + 2a_0 + \gamma_0 \\ \gamma_{1,2}a_2 + 2\gamma_{1,1}a_1 + \gamma_{1,0}a_0 + \gamma_1 \\ 2\gamma_{2,2}a_2 + \gamma_{1,2}a_1 + \gamma_{0,2}a_0 + \gamma_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \nabla^2 = \begin{bmatrix} 2 & \gamma_{1,0} & \gamma_{0,2} \\ \gamma_{1,0} & 2\gamma_{1,1} & \gamma_{1,2} \\ \gamma_{0,2} & \gamma_{1,2} & 2\gamma_{2,2} \end{bmatrix}$$

Fitovanie so všeobecnými bázickými funkciami

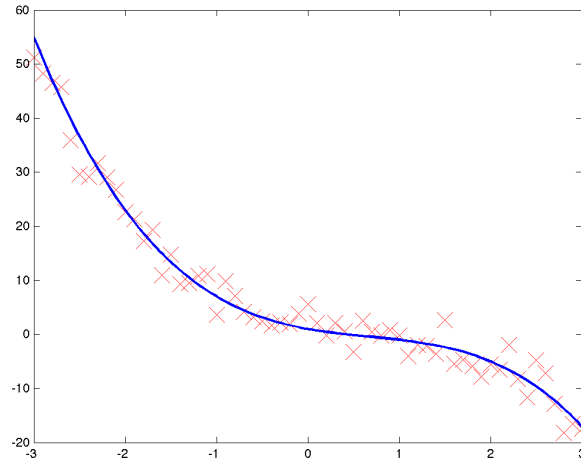
Michal Kvasnica

Príklad: fit dát funkciou $y=a_2x^2+a_1x+a_0$



$$\min \sum ((a_2x_i^2 + a_1x_i + a_0) - y_i)^2$$

Fit dát polynómom



$$\begin{aligned} \min \quad & \sum (\hat{y}_i - y_i)^2 \\ \text{s.t.} \quad & \hat{y}_i = a_3 x_i^3 + a_2 x_i^2 + a_1 x_i + a_0 \end{aligned}$$

Fit dát polynómom

$$\begin{aligned} \min \quad & (\hat{y}_1 - y_1)^2 + (\hat{y}_2 - y_2)^2 + (\hat{y}_3 - y_3)^2 + (\hat{y}_4 - y_4)^2 + (\hat{y}_5 - y_5)^2 \\ \text{s.t.} \quad & \hat{y}_1 = a_3 x_1^3 + a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0 \\ & \hat{y}_2 = a_3 x_2^3 + a_2 x_2^2 + a_1 x_2 + a_0 \\ & \hat{y}_3 = a_3 x_3^3 + a_2 x_3^2 + a_1 x_3 + a_0 \\ & \hat{y}_4 = a_3 x_4^3 + a_2 x_4^2 + a_1 x_4 + a_0 \\ & \hat{y}_5 = a_3 x_5^3 + a_2 x_5^2 + a_1 x_5 + a_0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \hat{y}_3 \\ \hat{y}_4 \\ \hat{y}_5 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^3 & x_3^2 & x_3 & 1 \\ x_4^3 & x_4^2 & x_4 & 1 \\ x_5^3 & x_5^2 & x_5 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \min (Ma - y)^2 \Rightarrow \min (Ma - y)^T (Ma - y)$$

Fit dát polynómom

$$a^* = \arg \min_a (Ma - y)^T (Ma - y)$$

$$1 \quad \nabla f(a) = 0 = 2M^T Ma - 2M^T y$$

$$2 \quad a^* = (M^T M)^{-1} M^T y$$

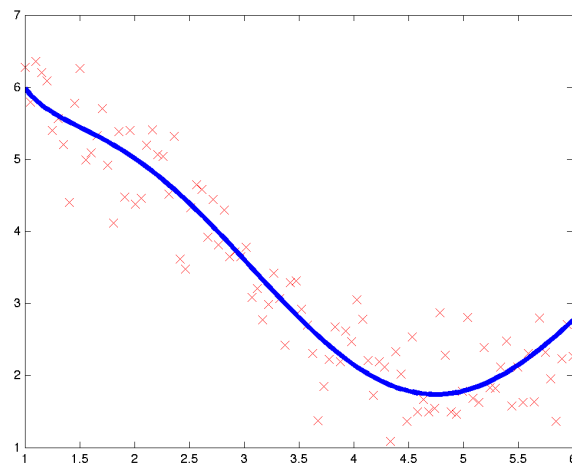
$$\begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \hat{y}_3 \\ \hat{y}_4 \\ \hat{y}_5 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^3 & x_3^2 & x_3 & 1 \\ x_4^3 & x_4^2 & x_4 & 1 \\ x_5^3 & x_5^2 & x_5 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial(Zx)}{\partial x} = Z^T$$

$$\frac{\partial(x^T Z)}{\partial x} = Z$$

$$\frac{\partial(x^T Z x)}{\partial x} = (Z + Z^T)x$$

Fitovanie všeobecnými bázickými funkciami



$$\min \sum (\hat{y}_i - y_i)^2$$

$$\text{s.t. } \hat{y}_i = a_0 \sin(x_i) + a_1 \exp(1/x_i) + a_2$$

Všeobecné bážické funkcie

$$\min (Ma - y)^T (Ma - y)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \vdots \\ \hat{y}_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sin(x_1) & \exp(1/x_1) & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sin(x_n) & \exp(1/x_n) & 1 \end{bmatrix}}_M \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}_a$$

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum (\hat{y}_i - y_i)^2 \\ \text{s.t.} \quad & \hat{y}_i = a_0 \sin(x_i) + a_1 \exp(1/x_i) + a_2 \end{aligned}$$

Všeobecné bážické funkcie

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum (\hat{y}_i - y_i)^2 \\ \text{s.t.} \quad & \hat{y}_i = \sum a_j f_j(x_i) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \vdots \\ \hat{y}_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_m(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_m(x_n) \end{bmatrix}}_M \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}}_a$$

$$a^* = (M^T M)^{-1} M^T y$$

Odkaz dňa

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum (\hat{y}_i - y_i)^2 \\ \text{s.t.} \quad & \hat{y}_i = \sum a_j f_j(x_i) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \vdots \\ \hat{y}_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_m(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_m(x_n) \end{bmatrix}}_M \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}}_a$$

Fit ľubovoľnou kombináciou bázických funkcií je
jednoduchý optimalizačný problém

Extrémy funkcií s ohraničeniami v
tvare rovnosti

Michal Kvasnica

Optimalizačný problém s ohraničeniami

$$x^* = \arg \min_x f(x)$$

účelová funkcia

$$\text{s.t. } g(x) \leq 0$$

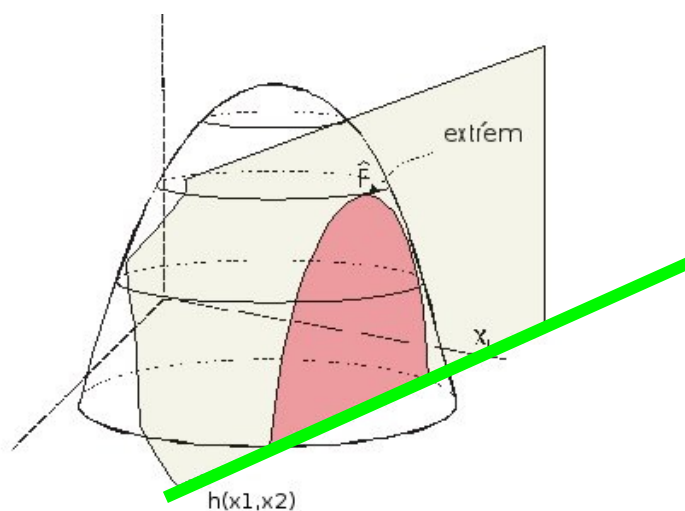
$$h(x) = 0$$

ohraničenia

Ohraničenia:

- v tvare nerovnosti (napr. dolné/horné hranice)
- v tvare rovnosti (napr. zachovanie hmoty, energie)

Ohraničenia v tvare rovnosti



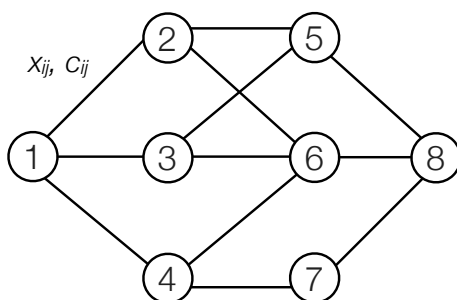
Alokačný problém

Úloha:

- určiť optimálne rozdelenie 60,000€ medzi prácu (x) a materiál (y)
- aby sa maximalizoval počet vyrobených kusov $N(x, y) = 4xy - 8x$

$$\begin{aligned} \max \quad & 4xy - 8x \\ \text{s.t.} \quad & x + y = 60000 \end{aligned}$$

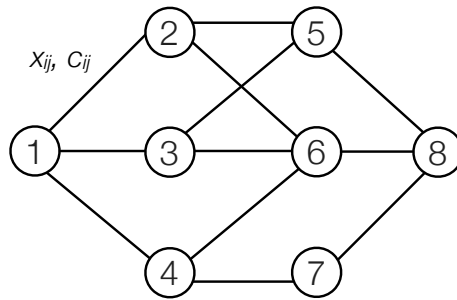
Transportačný problém



Určiť toky ropy cez jednotlivé potrubia tak, aby:

- bola minimalizovaná cena prepravy
- nedochádzalo k akumulácii v jednotlivých uzloch
- množstvo vstupujúcej ropy sa rovnalo množstvu vystupujúcej ropy

Transportačný problém



$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i,j} c_{i,j} x_{i,j} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in \mathcal{I}_j} x_{i,j} = \sum_{j \in \mathcal{O}_i} x_{i,j} \\ & \sum_{j \in \mathcal{O}_1} x_{1,j} = x_{\text{in}} \\ & \sum_{i \in \mathcal{I}_8} x_{i,8} = x_{\text{in}} \end{aligned}$$

Návrhový problém

Úloha:

- navrhnuť rozmery plechovky s daným objemom
- aby sa minimalizovala spotreba materiálu na jej vyrobenie

$$\begin{aligned} \min \quad & 2\pi r^2 + 2\pi r v \\ \text{s.t.} \quad & \pi r^2 v = V \end{aligned}$$



Ohraničenia v tvare rovnosti

$$\begin{array}{ll}\min_x & f(x) \\ \text{s.t.} & h(x) = 0\end{array}$$

Spôsoby riešenia:

- eliminačná metóda
- metóda Lagrangeových násobičov (multiplikátorov)

Ohraničenia v tvare rovnosti

$$\begin{array}{ll}\min_x & f(x) \\ \text{s.t.} & h(x) = 0\end{array}$$

Spôsoby riešenia:

- **eliminačná metóda**
- metóda Lagrangeových násobičov (multiplikátorov)

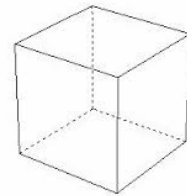
Eliminačná metóda

Princíp:

- vyjadriť $n-1$ premenných z ohraničení a dosadiť do účelovej funkcie
- problém riešiť ako optimalizáciu bez ohraničení
- spätne substituovať optimálne riešenie do ohraničení

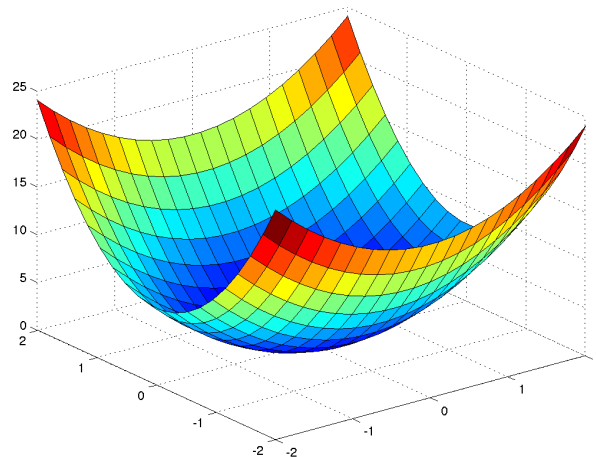
Príklad:

$$\begin{aligned} \min \quad & ab + 2bc + 2ac \Rightarrow \min 4b \frac{50}{b^2} + 2b \frac{50}{b^2} + 8b \frac{50}{b^2} \Rightarrow b^* \\ \text{s.t.} \quad & a = 4b \\ & abc = 200 \Rightarrow 4b^2c = 200 \Rightarrow c = \frac{50}{b^2} \end{aligned}$$



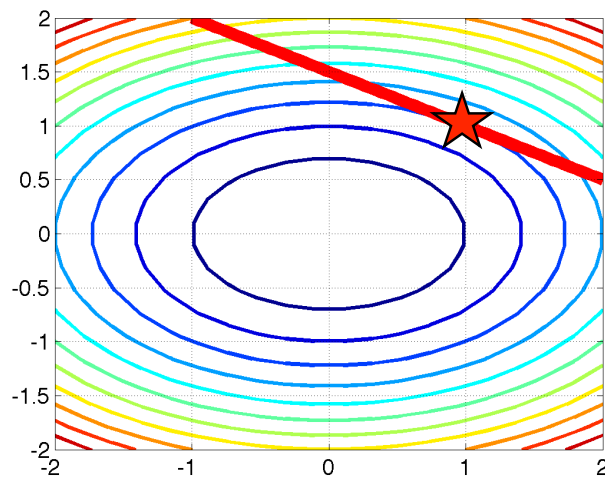
Príklad

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2} \quad & 2x_1^2 + 4x_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + 4x_2 = 6 \end{aligned}$$



Príklad

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2} \quad & 2x_1^2 + 4x_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + 4x_2 = 6 \end{aligned}$$



Príklad

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2} \quad & 2x_1^2 + 4x_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + 4x_2 = 6 \end{aligned}$$

- 1 $2x_1 + 4x_2 = 6 \Rightarrow x_2 = \frac{3 - x_1}{2}$
- 2 $\min 2x_1^2 + 4\left(\frac{3 - x_1}{2}\right)^2 = \min 3x_1^2 - 6x_1 + 9$
- 3 $(3x_1^2 - 6x_1 + 9)' = 6x_1 - 6 = 0 \Rightarrow x_1^* = 1$
- 4 $(3x_1^2 - 6x_1 + 9)'' = 6 > 0$
- 5 $x_2^* = \frac{3 - x_1^*}{2} = 1$
- 6 $2x_1^* + 4x_2^* \stackrel{?}{=} 6$

Eliminácia systému lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} \min f(x_1, x_2, x_3) \\ \text{s.t. } a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 &= b_2 \\ \Downarrow \\ \min f(x_1, x_2, x_3) \\ \text{s.t. } \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \\ \Downarrow \\ \min f(x) \\ \text{s.t. } Ax &= b \end{aligned}$$

Eliminácia systému lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} \min_x f(x) \\ \text{s.t. } Ax &= b \end{aligned}$$

Idea: nájdime bod x_0 a maticu F takú, že platí

$$Ax_0 = b, \quad AF = 0$$

a vyjadríme $x = x_0 + F\alpha$

Potom $A(x_0 + F\alpha) = Ax_0 + AF\alpha = b$ a teda ohraničenie je redundantné (môžeme ho odstrániť)

$$\begin{aligned} \text{Preto } \min_x f(x) &\Rightarrow \min_{\alpha} f(x^* + F\alpha) \Rightarrow \alpha^* \Rightarrow x^* = x_0 + F\alpha^* \\ \text{s.t. } Ax &= b \end{aligned}$$

Eliminácia systému lineárnych rovníc

$$\begin{array}{ll}\min_x & f(x) \\ \text{s.t.} & Ax = b\end{array}$$

Idea: nájdime bod x_0 a maticu F takú, že platí

$$Ax_0 = b, \quad AF = 0$$

$$\begin{array}{l}x_0 = \text{pinv}(A)*b \\ F = \text{null}(A)\end{array}$$

Eliminácia systému nelineárnych rovníc

$$\begin{array}{ll}\min_x & f(x) \\ \text{s.t.} & h(x) = 0\end{array}$$

Nelineárne ohraničenia sa vo všeobecnosti nedajú ľahko eliminovať

Ale niektoré sa dajú prepísať do lineárneho tvaru:

$$(x_1 + x_2)^2 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0$$

$$\frac{x_1}{(1 + x_2)^2} = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

Extrémy funkcií s ohraničeniami v tvare rovnosti

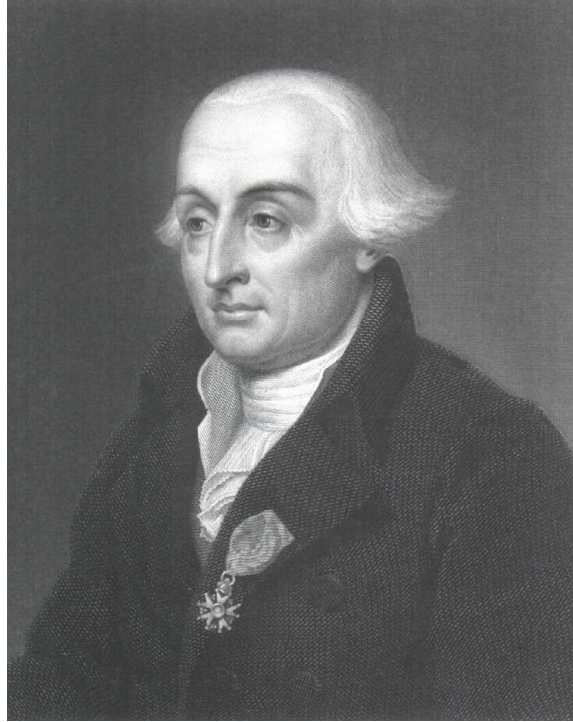
Michal Kvasnica

Ohraničenia v tvare rovnosti

$$\begin{array}{ll}\min_x & f(x) \\ \text{s.t.} & h(x) = 0\end{array}$$

Spôsoby riešenia:

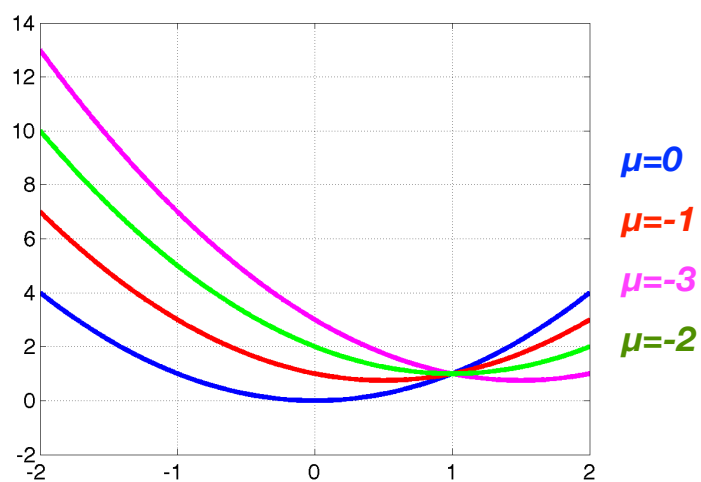
- eliminačná metóda
- **metóda Lagrangeových násobičov (multiplikátorov)**



Joseph-Louis Lagrange
(1736 - 1813)

Metóda Lagrangeových multiplikátorov

$$\begin{array}{lll} \min_x x^2 & \Rightarrow & \min_x x^2 \\ \text{s.t. } x = 1 & & \text{s.t. } x - 1 = 0 \end{array} \Rightarrow \min_{x, \mu} x^2 + \mu(x - 1)$$



Metóda Lagrangeových multiplikátorov

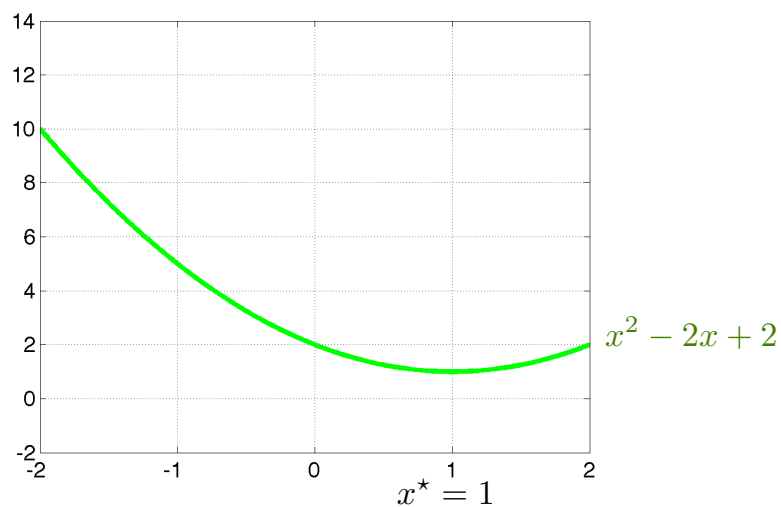
$$\begin{array}{lll} \min_x x^2 & \Rightarrow & \min_x x^2 \\ \text{s.t. } x = 1 & & \text{s.t. } x - 1 = 0 \end{array} \Rightarrow \min_{x,\mu} x^2 + \mu(x - 1)$$

1 $\nabla = \begin{bmatrix} 2x + \mu \\ x - 1 \end{bmatrix}$

2 $2x^* + \mu^* = 0 \Rightarrow \mu^* = -2$
 $x^* - 1 = 0 \Rightarrow x^* = 1$

Metóda Lagrangeových multiplikátorov

$$\begin{array}{lll} \min_x x^2 & \Rightarrow & \min_x x^2 \\ \text{s.t. } x = 1 & & \text{s.t. } x - 1 = 0 \end{array} \Rightarrow \min_{x,\mu} x^2 + \mu(x - 1)$$



Metóda Lagrangeových multiplikátorov

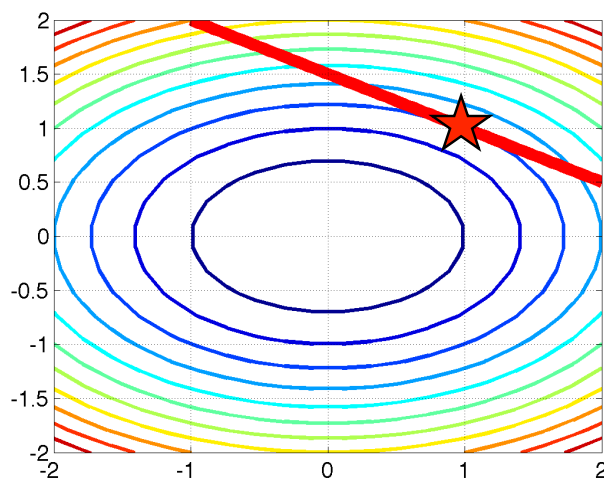
$$\begin{aligned} \min_x & f(x) \\ \text{s.t. } & h_1(x) = 0 \\ & \vdots \\ & h_m(x) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Lagrangian: } \mathcal{L}(x, \mu_1, \dots, \mu_m) = f(x) + \sum_{i=1}^m \mu_i h_i(x)$$

$$\text{Podmienka optimality: } \nabla \mathcal{L}(x^*, \mu_1^*, \dots, \mu_m^*) = 0$$

Príklad

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2} & 2x_1^2 + 4x_2^2 \\ \text{s.t. } & 2x_1 + 4x_2 = 6 \end{aligned}$$



Príklad

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2} \quad & 2x_1^2 + 4x_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + 4x_2 = 6 \end{aligned}$$

1 $\mathcal{L}(x_1, x_2, \mu) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + \mu(2x_1 + 4x_2 - 6)$

2 $\nabla \mathcal{L}(x_1, x_2, \mu) = \begin{bmatrix} 4x_1 + 2\mu \\ 8x_2 + 4\mu \\ 2x_1 + 4x_2 - 6 \end{bmatrix}$

3
$$\begin{aligned} 4x_1^* + 2\mu^* &= 0 & x_1^* &= 1 \\ 8x_2^* + 4\mu^* &= 0 & \Rightarrow x_2^* &= 1 \\ 2x_1^* + 4x_2^* &= 6 & \mu^* &= -2 \end{aligned}$$

Riešenie pomocou eliminačnej metódy

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2} \quad & 2x_1^2 + 4x_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + 4x_2 = 6 \end{aligned}$$

1 $2x_1 + 4x_2 = 6 \Rightarrow x_2 = \frac{3 - x_1}{2}$

2 $\min 2x_1^2 + 4\left(\frac{3 - x_1}{2}\right)^2 = \min 3x_1^2 - 6x_1 + 9$

3 $(3x_1^2 - 6x_1 + 9)' = 6x_1 - 6 = 0 \Rightarrow x_1^* = 1$

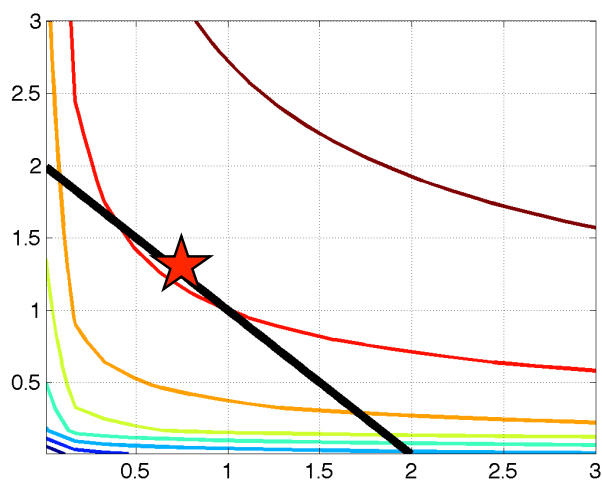
4 $(3x_1^2 - 6x_1 + 9)'' = 6 > 0$

5 $x_2^* = \frac{3 - x_1^*}{2} = 1$

6 $2x_1^* + 4x_2^* \stackrel{?}{=} 6$

Príklad

$$\begin{aligned} \max \quad & \log(x) + 2\log(y) \\ \text{s.t.} \quad & x + y = 2 \end{aligned}$$



Príklad

$$\begin{aligned} \max \quad & \log(x) + 2\log(y) \\ \text{s.t.} \quad & x + y = 2 \end{aligned}$$

1 $\mathcal{L}(x, y, \mu) = \log(x) + 2\log(y) + \mu(x + y - 2)$

2 $\nabla \mathcal{L}(x, y, \mu) = \begin{bmatrix} 1/x + \mu \\ 2/y + \mu \\ x + y - 2 \end{bmatrix}$

3
$$\begin{aligned} 1/x^* + \mu^* &= 0 & x^* &= 2/3 \\ 2/y^* + \mu^* &= 0 & \Rightarrow y^* &= 4/3 \\ x^* + y^* &= 2 & \mu^* &= -3/2 \end{aligned}$$

Kvadratický problém s rovnostami

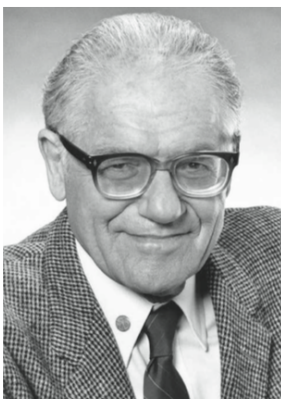
$$\begin{aligned} \min_x \quad & x^T P x + q^T x + r \\ \text{s.t.} \quad & A x = b \end{aligned}$$

1 $\mathcal{L}(x, \mu) = x^T P x + q^T x + r + \mu^T (A x - b)$

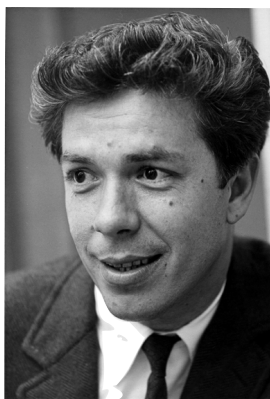
2 $\nabla \mathcal{L}(x, \mu) = \begin{bmatrix} 2P x + q + A^T \mu \\ A x - b \end{bmatrix}$

3 $\begin{aligned} 2P x^* + q + A^T \mu^* &= 0 \\ A x^* &= b \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2P & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ \mu^* \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -q \\ b \end{bmatrix}$

Karush-Kuhn-Tuckerov systém



William Karush
(1917 - 1997)



Harold W. Kuhn
(1925 - 2014)



Albert W. Tucker
(1905 - 1995)

Príklad

Podnik zvažuje nákup palív určených na vykurovanie, pričom má striktné ohraňovania na celkovú výhrevnosť (200) a celkový objem (100) nakúpených palív. Cieľom je minimalizovať náklady, ktoré sú dané ako suma kvadrátov.

	Uhlie	Plyn	Olej
Cena	8	15	20
Výhrevnosť	1,5	2,1	2,8
Objem	4,5	1,0	1,3

$$\begin{aligned} \min & 8x_1^2 + 15x_2^2 + 20x_3^2 \\ \text{s.t.} & 1.5x_1 + 2.1x_2 + 2.8x_3 = 200 \\ & 4.5x_1 + 1.0x_2 + 1.3x_3 = 100 \end{aligned}$$

Príklad

$$\begin{aligned} \min & 8x_1^2 + 15x_2^2 + 20x_3^2 \\ \text{s.t.} & 1.5x_1 + 2.1x_2 + 2.8x_3 = 200 \\ & 4.5x_1 + 1.0x_2 + 1.3x_3 = 100 \end{aligned}$$

1
$$\begin{aligned} \min_x & x^T P x + q^T x + r \\ \text{s.t.} & A x = b \end{aligned}$$

2
$$P = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, r = 0, A = \begin{bmatrix} 1.5 & 2.1 & 2.8 \\ 4.5 & 1.0 & 1.3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 200 \\ 100 \end{bmatrix}$$

3
$$\begin{bmatrix} 2P & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ \mu^* \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -q \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow x^* = \begin{pmatrix} 1.61 \\ 40.22 \\ 40.40 \end{pmatrix}, \mu^* = \begin{pmatrix} -679.69 \\ 220.82 \end{pmatrix}$$

Nie vždy je gradient Lagrangiánu nulový!

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 + x_3^2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 = 1 \\ & x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{aligned}$$

1 $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (1, 0, 0)$

2 $\mathcal{L} = x_1 + x_2 + x_3^2 + \mu_1(x_1 - 1) + \mu_2(x_1^2 + x_2^2 - 1)$

3
$$\nabla \mathcal{L} = \begin{bmatrix} 1 + \mu_1 + 2\mu_2 x_1 \\ 1 + 2\mu_2 x_2 \\ 2x_3 \\ x_1 - 1 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \nabla \mathcal{L}(x^*, \mu^*) = \begin{bmatrix} 1 + \mu_1 + 2\mu_2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0$$

Čo sa stalo?

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 + x_3^2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 = 1 \\ & x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{aligned}$$

Gradienty ohraničení v optime sú lineárne závislé:

$$\nabla h_1(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (1, 0, 0)$$

$$\nabla h_2(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (2, 0, 0)$$

Podmienka lineárnej nezávislosti vektorov

Vektory $v_1, \dots, v_m$ ako stĺpce matice $V=[v_1, \dots, v_m]$ sú lineárne nezávislé vtedy, keď **hodnosť** matice V je rovná **m** .

Hodnosť matice je počet lineárne nezávislých riadkov a stĺpcov.

Aká je hodnosť nasledovných matic?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{3}$$

Veta

Uvažujme optimalizačný problém $\min f(x)$ s.t. $h_i(x)=0, i=1, \dots, m$

Potom je splnená **práve jedna** z podmienok:

- vektory $\nabla h_1(x^*), \dots, \nabla h_m(x^*)$ sú lineárne závislé
- existujú Lagrangeove násobiče $\mu_1^*, \dots, \mu_m^*$ také, že $\nabla L(x^*, \mu^*)=0$

Ekonomická interpretácia Lagrangeových mult.

Rafinéria zásobuje zákazníka dvoma potrubiami. Cena prepravy cez prvé potrubie je x^2 , cez druhé potrubie $1.5y^2$. Ako máme rozvrhnúť prepravu, ak je potrebné celkovo dopraviť 100 ton a cena prepravy má byť minimálna?

$$\begin{aligned} \min \quad & x^2 + 1.5y^2 \\ \text{s.t.} \quad & x + y = 100 \end{aligned}$$

1 $\mathcal{L}(x, y, \mu) = x^2 + 1.5y^2 + \mu(x + y - 100)$

2 $\nabla \mathcal{L} = \begin{bmatrix} 2x + \mu \\ 3y + \mu \\ x + y - 100 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{aligned} x^* &= 60 \\ y^* &= 40 \\ \mu^* &= -120 \end{aligned}$

3 $(x^*)^2 + 1.5(y^*)^2 = 6000$

Ekonomická interpretácia Lagrangeových mult.

Rafinéria zásobuje zákazníka dvoma potrubiami. Cena prepravy cez prvé potrubie je x^2 , cez druhé potrubie $1.5y^2$. Ako máme rozvrhnúť prepravu, ak je potrebné celkovo dopraviť 110 ton a cena prepravy má byť minimálna?

$$\begin{aligned} \min \quad & x^2 + 1.5y^2 \\ \text{s.t.} \quad & x + y = 110 \end{aligned}$$

1 $\mathcal{L}(x, y, \mu) = x^2 + 1.5y^2 + \mu(x + y - 110)$

2 $\nabla \mathcal{L} = \begin{bmatrix} 2x + \mu \\ 3y + \mu \\ x + y - 110 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{aligned} x^* &= 66 \\ y^* &= 44 \\ \mu^* &= -132 \end{aligned}$

3 $(x^*)^2 + 1.5(y^*)^2 = 7260 \quad \mu^*(100) = -120, \Delta = 10, -\mu^*\Delta = 1200$

Ekonomická interpretácia Lagrangeových mult.

Uvažujme problém $\min f(x)$ s.t. $h(x)=b$ pre jednu konkrétnu hodnotu b .

Ako sa zmení hodnota účelovej funkcie, teda $f(x^*)$, ak sa pravá strana ohraničenia zmení z b na $b+\Delta$?

Označme μ^* ako optimálnu hodnotu Lagrangeovho multiplikátora pre problém s $h(x)=b$.

Potom po zmene ohraničenia na $h(x)=b+\Delta$ sa hodnota účelovej funkcie zmení približne o $-\mu^*\Delta$.

Preto hodnota μ^* vyjadruje citlivosť optimálneho riešenia na zmenu pravej strany ohraničenia.

Ekonomická interpretácia Lagrangeových mult.

Podnik zvažuje nákup palív určených na vykurovanie, pričom má striktné ohraničenia na celkovú výhrevnosť (200) a celkový objem (100) nakúpených palív. Cieľom je minimalizovať náklady, ktoré sú dané ako suma kvadrátov.

	Uhlie	Plyn	Olej
Cena	8	15	20
Výhrevnosť	1,5	2,1	2,8
Objem	4,5		

zvýšenie výhrevnosti = rast nákladov

$$\begin{aligned} \min & 8x_1^2 + 15x_2^2 + 20x_3^2 \\ \text{s.t. } & 1.5x_1 + 2.1x_2 + 2.8x_3 = 200 \Rightarrow x^* = \begin{pmatrix} 1.61 \\ 40.22 \\ 40.40 \end{pmatrix}, \mu^* = \begin{pmatrix} -679.69 \\ 220.82 \end{pmatrix} \\ & 4.5x_1 + 1.0x_2 + 1.3x_3 = 100 \end{aligned}$$

zvýšenie objemu = pokles nákladov

Ekonomická interpretácia Lagrangeových mult.

$$\begin{aligned} \min & 8x_1^2 + 15x_2^2 + 20x_3^2 \\ \text{s.t. } & 1.5x_1 + 2.1x_2 + 2.8x_3 = 200 \Rightarrow x^* = \begin{pmatrix} 1.61 \\ 40.22 \\ 40.40 \end{pmatrix}, \mu^* = \begin{pmatrix} -679.69 \\ 220.82 \end{pmatrix} \\ & 4.5x_1 + 1.0x_2 + 1.3x_3 = 100 \end{aligned}$$

zvýšenie výhrevnosti = rast nákladov

zvýšenie objemu = pokles nákladov

Otázky:

- ako sa zmenia obstarávacie náklady, ak sa požadovaná výhrevnosť zníži o 20% a objem ostane rovnaký?
- ako sa zmenia náklady, ak výhrevnosť aj objem klesnú o 10%?
- o koľko % treba zvýšiť dovolený objem, aby pri zvýšení výhrevnosti o 10% boli náklady zhruba rovnaké?

Extrémy funkcií s ohraničeniami v tvare nerovností

Michal Kvasnica

Optimalizačný problém s ohraničeniami

$$x^* = \arg \min_x f(x)$$

účelová funkcia

$$\text{s.t. } g(x) \leq 0$$

$$h(x) = 0$$

ohraničenia

Ohraničenia:

- v tvare rovností (napr. zachovanie hmoty, energie)
- **v tvare nerovností (napr. dolné/horné hranice)**

Alokačný problém

Úloha:

- určiť optimálne rozdelenie 60,000€ medzi prácu (x) a materiál (y)
- aby sa maximalizoval počet vyrobených kusov $N(x, y) = 4xy - 8x$
- pričom náklady na materiál musia byť najviac 20,000€

$$\max 4xy - 8x$$

$$\text{s.t. } x + y = 60000$$

$$y \leq 20000$$

Diétny problém

Dané sú kalorické hodnoty c_i a ceny p_i jednotlivých potravín.

Je potrebné určiť optimálny nákup tak, aby:

- bola minimalizovaná celková cena
- sme dokázali pripraviť jedlo kalorickej hodnoty h
- stál najviac 10€

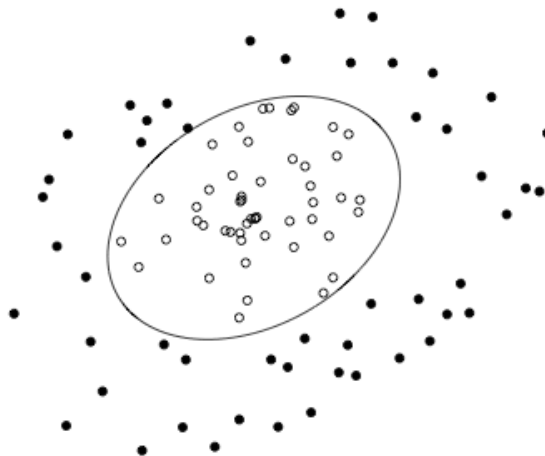
$$\begin{aligned} \min \quad & \sum p_i x_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum c_i x_i = h \\ & \sum p_i x_i \leq 10 \end{aligned}$$

Separačný problém

V rafinérii sú 2 druhy prevádzok: vysokotlakové a nízkotlakové.

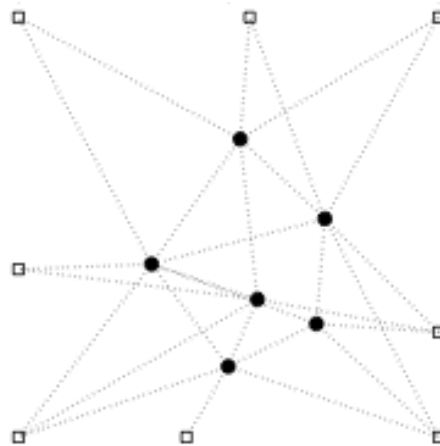
Je potrebné určiť:

- či je ich možné separovať bezpečnostným múrom
- ak áno, kade má taký múr viesť

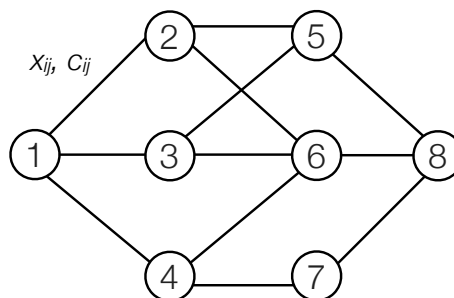


Logistický problém

Logistická firma chce navrhnúť optimálne rozdelenie skladov tak, aby boli minimalizované prepravné náklady potrebné na obsluhu zákazníkov.



Transportačný problém

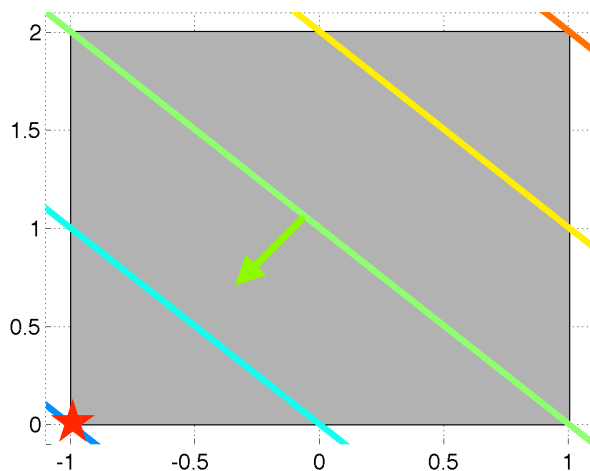


Určiť toky ropy cez jednotlivé potrubia tak, aby:

- bola minimalizovaná cena prepravy
- nedochádzalo k akumulácii v jednotlivých uzloch
- množstvo vstupujúcej ropy sa rovnalo množstvu vystupujúcej ropy
- boli dodržaný dolný/horný limit jednotlivých potrubí

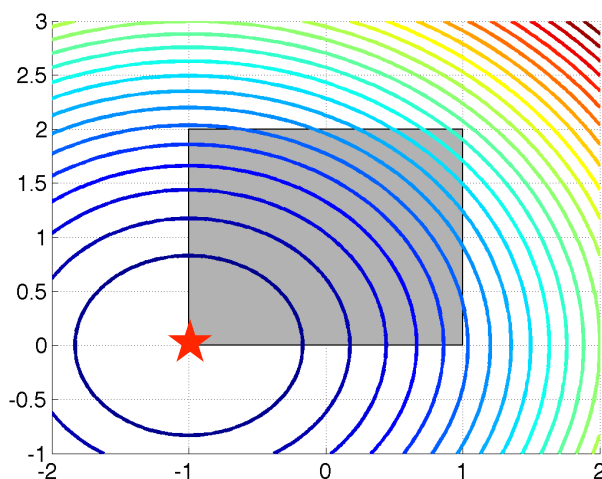
Aktívne/neaktívne ohraničenia

$$\begin{array}{ll}
 \min x_1 + x_2 & \Rightarrow \min x_1 + x_2 \\
 \text{s.t. } -1 \leq x_1 \leq 1 & \text{s.t. } x_1 \leq 1 \text{ neaktívne} \\
 & -x_1 \leq 1 \text{ aktívne} \\
 & 0 \leq x_2 \leq 2 \text{ neaktívne} \\
 & -x_2 \leq 0 \text{ aktívne}
 \end{array}$$



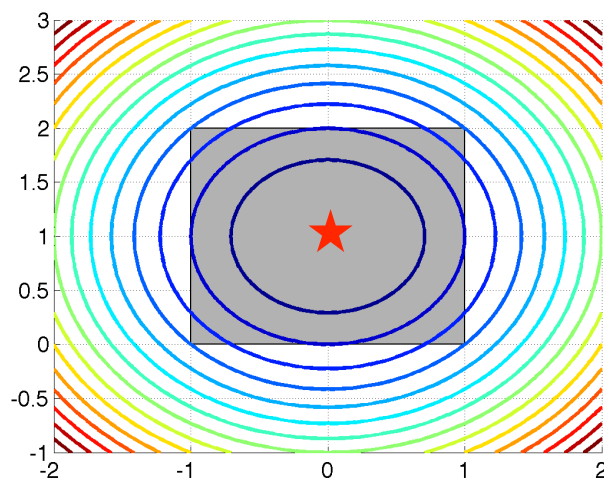
Aktívne/neaktívne ohraničenia

$$\begin{array}{ll}
 \min (x_1 + 1)^2 + x_2^2 & \\
 \text{s.t. } x_1 \leq 1 \text{ neaktívne} & \\
 -x_1 \leq 1 \text{ aktívne} & \\
 x_2 \leq 2 \text{ neaktívne} & \\
 -x_2 \leq 0 \text{ aktívne} &
 \end{array}$$



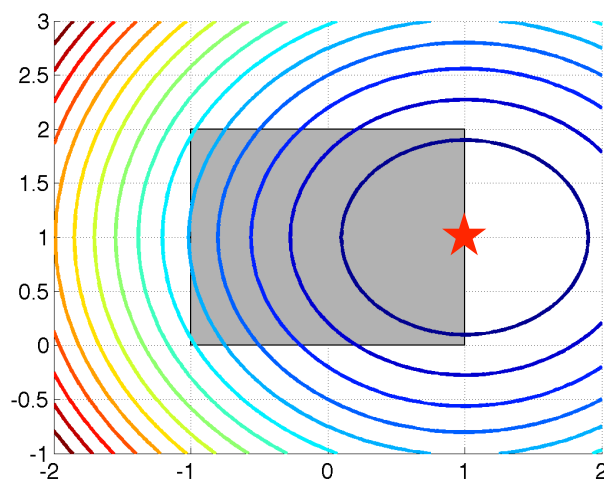
Aktívne/neaktívne ohraničenia

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 \leq 1 \text{ neaktívne} \\ & -x_1 \leq 1 \text{ neaktívne} \\ & x_2 \leq 2 \text{ neaktívne} \\ & -x_2 \leq 0 \text{ neaktívne} \end{aligned}$$



Aktívne/neaktívne ohraničenia

$$\begin{aligned} \min \quad & (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 \leq 1 \text{ aktívne} \\ & -x_1 \leq 1 \text{ neaktívne} \\ & x_2 \leq 2 \text{ neaktívne} \\ & -x_2 \leq 0 \text{ neaktívne} \end{aligned}$$

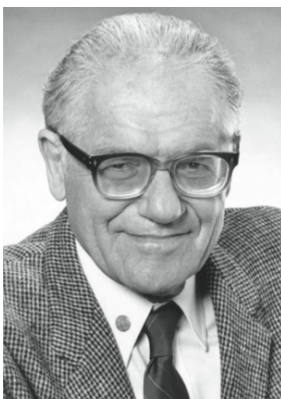


Aktívne/neaktívne ohraničenia

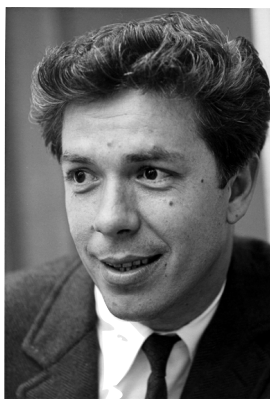
Uvažujme problém $\min f(x)$ s.t. $h_i(x) \leq 0$ pre $i=1, \dots, m$

Potom:

- i -té ohraničenie je v optime **aktívne**, ak platí $h_i(x^*)=0$
- i -té ohraničenie je v optime **neaktívne**, ak platí $h_i(x^*)<0$



William Karush
(1917 - 1997)



Harold W. Kuhn
(1925 - 2014)



Albert W. Tucker
(1905 - 1995)

Karush-Kuhn-Tuckerove podmienky optimality

Uvažujme problém $\min f(x)$ s.t. $h_i(x) \leq 0$ pre $i=1, \dots, m$

Vytvorme Lagrangian: $\mathcal{L}(x, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x) + \sum \lambda_i h_i(x)$

Potom sú $x^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*$ optimálnym riešením **iba ak** platí

$$\nabla f(x^*) + \sum \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) = 0 \quad \text{stacionarita}$$

$$h_i(x^*) \leq 0 \quad \text{primárna zlučiteľnosť}$$

$$\lambda_i^* \geq 0 \quad \text{duálna zlučiteľnosť}$$

$$\lambda_i^* h_i(x^*) = 0 \quad \text{doplnková voľnosť}$$

Ak je i -té ohraničenie **neaktívne**, potom je $\lambda_i^* = 0$ (naopak to neplatí!)

Ak je problém **konvexný** (teda $f(x)$ aj $h_i(x)$ sú konvexné funkcie), potom sú tieto podmienky aj **postačujúce**.

KKT podmienky pre konvexný problém

$$\begin{array}{ll} \min (x-1)^2 & \Rightarrow \min (x-1)^2 \\ \text{s.t. } x \leq 1 & \text{s.t. } x-1 \leq 0 \\ x \geq -1 & -x-1 \leq 0 \end{array}$$

$$\mathcal{L}(x, \lambda_1, \lambda_2) = (x-1)^2 + \lambda_1(x-1) + \lambda_2(-x-1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial x} = 2x - 2 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$x \leq 1$$

$$x \geq -1$$

$$\lambda_1 \geq 0$$

$$\lambda_2 \geq 0$$

$$\lambda_1(x-1) = 0$$

$$\lambda_2(-x-1) = 0$$

Preskúmanie kombinácií aktívnych ohraničení

Možnosti aktívnych ohraničení:

- žiadne nie je aktívne a teda $\lambda_1^*=0, \lambda_2^*=0$
- aktívne je $x \leq 1$ a teda $x^*=1$
- aktívne je $x \geq -1$ a teda $x^*=-1$

$$2x - 2 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$x \leq 1$$

$$x \geq -1$$

$$\lambda_1 \geq 0$$

$$\lambda_2 \geq 0$$

$$\lambda_1(x - 1) = 0$$

$$\lambda_2(-x - 1) = 0$$

Preskúmanie kombinácií aktívnych ohraničení

Možnosti aktívnych ohraničení:

- **žiadne nie je aktívne a teda $\lambda_1^*=0, \lambda_2^*=0$**
- aktívne je $x \leq 1$ a teda $x^*=1$
- aktívne je $x \geq -1$ a teda $x^*=-1$

$$2x - 2 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$x \leq 1$$

$$x \geq -1$$

$$\lambda_1 \geq 0$$

$$\lambda_2 \geq 0$$

Potom:

- $x^* = 1$ z rovnice stacionarity
- x^* je primárne zlučiteľné riešenie
- λ_1^* a λ_2^* sú duálne zlučiteľné
- sú splnené podmienky doplnkovej voľnosti
- ale nevieme, či nenájdeme lepšie riešenie

$$\lambda_1(x - 1) = 0$$

$$\lambda_2(-x - 1) = 0$$

Preskúmanie kombinácií aktívnych ohraničení

Možnosti aktívnych ohraničení:

- žiadne nie je aktívne a teda $\lambda_1^*=0, \lambda_2^*=0$

- **aktívne je $x \leq 1$ a teda $x^*=1$**

- aktívne je $x \geq -1$ a teda $x^*=-1$

$$2x - 2 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$x \leq 1$$

$$x \geq -1$$

$$\lambda_1 \geq 0$$

$$\lambda_2 \geq 0$$

Potom:

- $x^* = 1$ priamo z aktivity ohraničenia
- x^* je primárne zlučiteľné riešenie
- $\lambda_2^* = 0$ keďže ohraničenie $x \geq -1$ nie je aktívne
- $\lambda_1^* = 0$ z rovnice stacionarity
- λ_1^* a λ_2^* sú duálne zlučiteľné
- je splnená doplnková voľnosť
- ale stále nevieme, či nenájdeme lepšie riešenie

$$\lambda_1(x - 1) = 0$$

$$\lambda_2(-x - 1) = 0$$

Preskúmanie kombinácií aktívnych ohraničení

Možnosti aktívnych ohraničení:

- žiadne nie je aktívne a teda $\lambda_1^*=0, \lambda_2^*=0$

- aktívne je $x \leq 1$ a teda $x^*=1$

- **aktívne je $x \geq -1$ a teda $x^*=-1$**

$$2x - 2 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$x \leq 1$$

$$x \geq -1$$

$$\lambda_1 \geq 0$$

$$\lambda_2 \geq 0$$

Potom:

- $x^* = -1$ priamo z aktivity ohraničenia
- x^* je primárne zlučiteľné riešenie
- $\lambda_1^* = 0$ keďže ohraničenie $x \leq 1$ nie je aktívne
- $\lambda_2^* = -4$ z rovnice stacionarity
- λ_2^* **nie je** duálne zlučiteľné
- preto $x^*=-1$ nemôže byť optimálnym riešením

$$\lambda_1(x - 1) = 0$$

$$\lambda_2(-x - 1) = 0$$

Príklad

$$\begin{aligned} \min \quad & (x-2)^2 + 2(y-1)^2 \\ \text{s.t.} \quad & x + 4y \leq 3 \\ & x \geq y \end{aligned}$$

- 1 $\mathcal{L}(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = (x-2)^2 + 2(y-1)^2 + \lambda_1(x + 4y - 3) + \lambda_2(y - x)$
- 2 $2x - 4 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$
 $4y - 4 + 4\lambda_1 + \lambda_2 = 0$
- 3 $x + 4y \leq 3$
 $x \geq y$
- 4 $\lambda_1 \geq 0$
 $\lambda_2 \geq 0$
- 5 $\lambda_1(x + 4y - 3) = 0$
 $\lambda_2(y - x) = 0$

Príklad

Možnosti aktívnych ohraničení:

- žiadne nie je aktívne a teda $\lambda_1^*=0, \lambda_2^*=0$
- aktívne je $x+4y \leq 3$
- aktívne je $x \geq y$
- aktívne sú obidve ohraničenia

$$\begin{aligned} 2x - 4 + \lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \\ 4y - 4 + 4\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ x + 4y &\leq 3 \\ x &\geq y \\ \lambda_1 &\geq 0 \\ \lambda_2 &\geq 0 \\ \lambda_1(x + 4y - 3) &= 0 \\ \lambda_2(y - x) &= 0 \end{aligned}$$

Príklad

Možnosti aktívnych ohraničení:

- **žiadne nie je aktívne a teda $\lambda_1^*=0, \lambda_2^*=0$**

- aktívne je $x+4y \leq 3$
- aktívne je $x \geq y$
- aktívne sú obidve ohraničenia

Potom:

- $x^* = 2$ a $y^* = 1$ z rovnice stacionarity
- x^* a y^* **nie sú** primárne zlučiteľné riešenia!
(je porušená podmienka $x^*+4y^* \leq 3$)

$$2x - 4 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$4y - 4 + 4\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$x + 4y \leq 3$$

$$x \geq y$$

$$\lambda_1 \geq 0$$

$$\lambda_2 \geq 0$$

$$\lambda_1(x + 4y - 3) = 0$$

$$\lambda_2(y - x) = 0$$

Príklad

Možnosti aktívnych ohraničení:

- žiadne nie je aktívne a teda $\lambda_1^*=0, \lambda_2^*=0$

- **aktívne je $x+4y \leq 3$**

- aktívne je $x \geq y$
- aktívne sú obidve ohraničenia

Potom:

- $x^* = (3-4y^*)$ priamo z aktivity ohraničenia
- $\lambda_2^* = 0$ keďže ohraničenie $x \geq y$ nie je aktívne
- $y^* = 1/3$ a $\lambda_1^* = 2/3$ z rovnice stacionarity
- a teda $x^* = (3-4y^*) = 5/3$
- x^* aj y^* sú primárne zlučiteľné
- λ_1^* a λ_2^* sú duálne zlučiteľné
- je splnená doplnková voľnosť
- ale nevieme, či nenájdeme lepšie riešenie

$$2x - 4 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$4y - 4 + 4\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$x + 4y \leq 3$$

$$x \geq y$$

$$\lambda_1 \geq 0$$

$$\lambda_2 \geq 0$$

$$\lambda_1(x + 4y - 3) = 0$$

$$\lambda_2(y - x) = 0$$

Príklad

Možnosti aktívnych ohraničení:

- žiadne nie je aktívne a teda $\lambda_1^*=0, \lambda_2^*=0$
- aktívne je $x+4y \leq 3$
- **aktívne je $x \geq y$**
- aktívne sú obidve ohraničenia

$$2x - 4 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$4y - 4 + 4\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$x + 4y \leq 3$$

$$x \geq y$$

$$\lambda_1 \geq 0$$

$$\lambda_2 \geq 0$$

$$\lambda_1(x + 4y - 3) = 0$$

$$\lambda_2(y - x) = 0$$

Potom:

- $x^* = y^*$ priamo z aktivity ohraničenia
- $\lambda_1^* = 0$ keďže ohraničenie $x+4y \leq 3$ nie je aktívne
- $y^* = 4/3$ a $\lambda_2^* = -4/3$ z rovnice stacionarity
- λ_2^* **nie je** sú duálne zlučiteľná!

Príklad

Možnosti aktívnych ohraničení:

- žiadne nie je aktívne a teda $\lambda_1^*=0, \lambda_2^*=0$
- aktívne je $x+4y \leq 3$
- aktívne je $x \geq y$
- **aktívne sú obidve ohraničenia**

$$2x - 4 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$4y - 4 + 4\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$x + 4y \leq 3$$

$$x \geq y$$

$$\lambda_1 \geq 0$$

$$\lambda_2 \geq 0$$

$$\lambda_1(x + 4y - 3) = 0$$

$$\lambda_2(y - x) = 0$$

Potom:

- $x^* + 4y^* = 3$ priamo z aktivity prvého ohraničenia
- $x^* = y^*$ priamo z aktivity druhého ohraničenia
- Preto $x^* = 0.6$ a $y^* = 0.6$
- $\lambda_1^* = 0.88$ a $\lambda_2^* = -1.92$ z rovnice stacionarity
- λ_2^* **nie je** sú duálne zlučiteľná!

Karush-Kuhn-Tuckerove podmienky optimality

Uvažujme problém $\min f(x)$ s.t. $h_i(x) \leq 0, g_j(x) = 0$

Lagrangian: $\mathcal{L}(x, \lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_p) = f(x) + \sum \lambda_i h_i(x) + \sum \mu_j g_j(x)$

Potom sú $x^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*, \mu_1^*, \dots, \mu_p^*$ optimálnym riešením iba ak

$$\nabla f(x^*) + \sum \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) + \sum \mu_j^* \nabla g_j(x^*) = 0 \quad \text{stacionarita}$$

$$h_i(x^*) \leq 0 \quad \text{primárna zlučiteľnosť}$$

$$g_j(x^*) = 0$$

$$\lambda_i^* \geq 0 \quad \text{duálna zlučiteľnosť}$$

$$\lambda_i^* h_i(x^*) = 0 \quad \text{doplnková voľnosť}$$

Ak je problém **konvexný** (teda $f(x)$, $h_i(x)$ sú konvexné funkcie a $g_j(x)$ sú lineárne), potom sú tieto podmienky aj **postačujúce**.

Príprava na písomku

Michal Kvasnica

Organizačné detaily

2 písomky

Aspoň jedna musí byť na 56%

3 príklady na 2 hodiny

Môžete používať prednášky, poznámky aj Matlab, ale všetky výpočty musia byť dokumentované

Formulácia

min alebo max
účelová funkcia
ohraničenia

Riešenie

Lagrange
KKT

Interpretácia

hodnota účelovej funkcie
Lagrangove násobiče
aktívne ohraničenia

Formulácia	Riešenie	Interpretácia
min alebo max účelová funkcia ohraničenia	Lagrange KKT	hodnota účelovej funkcie Lagrangove násobiče aktívne ohraničenia
Firma vyrába dva druhy produktov: štandardný produkt A a sofistikovanú verziu B. Predaj produktov pri cene p_A a p_B bol odhadnutý na $400-2p_A+p_B$ kusov pre produkt A a na $200+p_A-p_B$ pre produkt B. Výroba jedného kusu produktu A vyžaduje 2 hodiny práce a 1 jednotku surovín, výroba produktu B zasa 3 hodiny práce a 2 jednotky surovín. Firma má k dispozícii 1000 hodín práce a 200 jednotiek surovín. Otázky: - aké je optimálne nastavenie cien p_A a p_B, aby bol najväčší príjem z predaja? - aký bude optimálny zisk, ak hodina práce stojí 5€ a jednotka suroviny 200€? - oplatí sa v záujme zvýšenia zisku zvýšiť limit práce a surovín?		

Formulácia	Riešenie	Interpretácia
min alebo max účelová funkcia ohraničenia	Lagrange KKT	hodnota účelovej funkcie Lagrangove násobiče aktívne ohraničenia
Firma vyrába dva druhy produktov: štandardný produkt A a sofistikovanú verziu B. Predaj produktov pri cene p_A a p_B bol odhadnutý na $400-2p_A+p_B$ kusov pre produkt A a na $200+p_A-p_B$ pre produkt B. Výroba jedného kusu produktu A vyžaduje 2 hodiny práce a 1 jednotku surovín, výroba produktu B zasa 3 hodiny práce a 2 jednotky surovín. Firma má k dispozícii 1000 hodín práce a 200 jednotiek surovín. Otázky: - aké je optimálne nastavenie cien p_A a p_B, aby bol najväčší príjem z predaja? - aký bude optimálny zisk, ak hodina práce stojí 5€ a jednotka suroviny 200€? - oplatí sa v záujme zvýšenia zisku zvýšiť limit práce a surovín?		

Formulácia	Riešenie	Interpretácia
min alebo max účelová funkcia ohraničenia	Lagrange KKT	hodnota účelovej funkcie Lagrangove násobiče aktívne ohraničenia
Firma vyrába dva druhy produktov: štandardný produkt A a sofistikovanú verziu B. Predaj produktov pri cene p_A a p_B bol odhadnutý na $400-2p_A+p_B$ kusov pre produkt A a na $200+p_A-p_B$ pre produkt B. Výroba jedného kusu produktu A vyžaduje 2 hodiny práce a 1 jednotku surovín, výroba produktu B zasa 3 hodiny práce a 2 jednotky surovín. Firma má k dispozícii 1000 hodín práce a 200 jednotiek surovín. Otázky: - aké je optimálne nastavenie cien p_A a p_B, aby bol najväčší príjem z predaja? - aký bude optimálny zisk, ak hodina práce stojí 5€ a jednotka suroviny 200€? - oplatí sa v záujme zvýšenia zisku zvýšiť limit práce a surovín?		

Formulácia	Riešenie	Interpretácia
min alebo max účelová funkcia ohraničenia	Lagrange KKT	hodnota účelovej funkcie Lagrangove násobiče aktívne ohraničenia
Firma vyrába dva druhy produktov: štandardný produkt A a sofistikovanú verziu B. Predaj produktov pri cene p_A a p_B bol odhadnutý na $400-2p_A+p_B$ kusov pre produkt A a na $200+p_A-p_B$ pre produkt B. Výroba jedného kusu produktu A vyžaduje 2 hodiny práce a 1 jednotku surovín, výroba produktu B zasa 3 hodiny práce a 2 jednotky surovín. Firma má k dispozícii 1000 hodín práce a 200 jednotiek surovín. Otázky: - aké je optimálne nastavenie cien p_A a p_B, aby bol najväčší príjem z predaja? - aký bude optimálny zisk, ak hodina práce stojí 5€ a jednotka suroviny 200€? - oplatí sa v záujme zvýšenia zisku zvýšiť limit práce a surovín?		

Formulácia	Riešenie	Interpretácia
min alebo max účelová funkcia ohraničenia	Lagrange KKT	hodnota účelovej funkcie Lagrangove násobiče aktívne ohraničenia
Firma vyrába dva druhy produktov: štandardný produkt A a sofistikovanú verziu B. Predaj produktov pri cene p_A a p_B bol odhadnutý na $400-2p_A+p_B$ kusov pre produkt A a na $200+p_A-p_B$ pre produkt B. Výroba jedného kusu produktu A vyžaduje 2 hodiny práce a 1 jednotku surovín, výroba produktu B zasa 3 hodiny práce a 2 jednotky surovín. Firma má k dispozícii 1000 hodín práce a 200 jednotiek surovín. Otázky: - aké je optimálne nastavenie cien p_A a p_B, aby bol najväčší príjem z predaja? - aký bude optimálny zisk, ak hodina práce stojí 5€ a jednotka suroviny 200€? - oplatí sa v záujme zvýšenia zisku zvýšiť limit práce a surovín?		

Formulácia	Riešenie	Interpretácia
min alebo max účelová funkcia ohraničenia	Lagrange KKT	hodnota účelovej funkcie Lagrangove násobiče aktívne ohraničenia
Firma vyrába dva druhy produktov: štandardný produkt A a sofistikovanú verziu B. Predaj produktov pri cene p_A a p_B bol odhadnutý na $400-2p_A+p_B$ kusov pre produkt A a na $200+p_A-p_B$ pre produkt B. Výroba jedného kusu produktu A vyžaduje 2 hodiny práce a 1 jednotku surovín, výroba produktu B zasa 3 hodiny práce a 2 jednotky surovín. Firma má k dispozícii 1000 hodín práce a 200 jednotiek surovín. 1 $\max p_A + p_B$ 2 $\max (400-2p_A+p_B) + (200+p_A-p_B)$ 3 $\max p_A(400-2p_A+p_B) + p_B(200+p_A-p_B)$		

Formulácia	Riešenie	Interpretácia
min alebo max účelová funkcia ohraničenia	Lagrange KKT	hodnota účelovej funkcie Lagrangove násobiče aktívne ohraničenia
Firma vyrába dva druhy produktov: štandardný produkt A a sofistikovanú verziu B. Predaj produktov pri cene p_A a p_B bol odhadnutý na $400-2p_A+p_B$ kusov pre produkt A a na $200+p_A-p_B$ pre produkt B. Výroba jedného kusu produktu A vyžaduje 2 hodiny práce a 1 jednotku surovín, výroba produktu B zasa 3 hodiny práce a 2 jednotky surovín. Firma má k dispozícii 1000 hodín práce a 200 jednotiek surovín.		
1 $\max p_A + p_B$		
2 $\max (400-2p_A+p_B) + (200+p_A-p_B)$		
3 $\max p_A(400-2p_A+p_B) + p_B(200+p_A-p_B)$		

Formulácia	Riešenie	Interpretácia
min alebo max účelová funkcia ohraničenia	Lagrange KKT	hodnota účelovej funkcie Lagrangove násobiče aktívne ohraničenia
Firma vyrába dva druhy produktov: štandardný produkt A a sofistikovanú verziu B. Predaj produktov pri cene p_A a p_B bol odhadnutý na $400-2p_A+p_B$ kusov pre produkt A a na $200+p_A-p_B$ pre produkt B. Výroba jedného kusu produktu A vyžaduje 2 hodiny práce a 1 jednotku surovín, výroba produktu B zasa 3 hodiny práce a 2 jednotky surovín. Firma má k dispozícii 1000 hodín práce a 200 jednotiek surovín.		
1 $2p_A + 1p_B \leq 1000$		
2 $2(400-2p_A+p_B) + 3(200+p_A-p_B) \leq 1000$		
3 $(400-2p_A+p_B) + 2(200+p_A-p_B) \leq 1000$		

Formulácia	Riešenie	Interpretácia
min alebo max účelová funkcia ohraničenia	Lagrange KKT	hodnota účelovej funkcie Lagrangove násobiče aktívne ohraničenia
Firma vyrába dva druhy produktov: štandardný produkt A a sofistikovanú verziu B. Predaj produktov pri cene p_A a p_B bol odhadnutý na $400-2p_A+p_B$ kusov pre produkt A a na $200+p_A-p_B$ pre produkt B. Výroba jedného kusu produktu A vyžaduje 2 hodiny práce a 1 jednotku surovín, výroba produktu B zasa 3 hodiny práce a 2 jednotky surovín. Firma má k dispozícii 1000 hodín práce a 200 jednotiek surovín.		
1 $2p_A + 1p_B \leq 1000$		
2 $2(400-2p_A+p_B) + 3(200+p_A-p_B) \leq 1000$		
3 $(400-2p_A+p_B) + 2(200+p_A-p_B) \leq 1000$		

Formulácia	Riešenie	Interpretácia
min alebo max účelová funkcia ohraničenia	Lagrange KKT	hodnota účelovej funkcie Lagrangove násobiče aktívne ohraničenia
Firma vyrába dva druhy produktov: štandardný produkt A a sofistikovanú verziu B. Predaj produktov pri cene p_A a p_B bol odhadnutý na $400-2p_A+p_B$ kusov pre produkt A a na $200+p_A-p_B$ pre produkt B. Výroba jedného kusu produktu A vyžaduje 2 hodiny práce a 1 jednotku surovín, výroba produktu B zasa 3 hodiny práce a 2 jednotky surovín. Firma má k dispozícii 1000 hodín práce a 200 jednotiek surovín.		
1 $p_A + 2p_B \leq 200$		
2 $2(400-2p_A+p_B) + (200+p_A-p_B) \leq 200$		
3 $(400-2p_A+p_B) + 2(200+p_A-p_B) \leq 200$		

Formulácia	Riešenie	Interpretácia
min alebo max účelová funkcia ohraničenia	Lagrange KKT	hodnota účelovej funkcie Lagrangove násobiče aktívne ohraničenia
Firma vyrába dva druhy produktov: štandardný produkt A a sofistikovanú verziu B. Predaj produktov pri cene p_A a p_B bol odhadnutý na $400-2p_A+p_B$ kusov pre produkt A a na $200+p_A-p_B$ pre produkt B. Výroba jedného kusu produktu A vyžaduje 2 hodiny práce a 1 jednotku surovín, výroba produktu B zasa 3 hodiny práce a 2 jednotky surovín. Firma má k dispozícii 1000 hodín práce a 200 jednotiek surovín. 1 $p_A + 2p_B \leq 200$ 2 $2(400-2p_A+p_B) + (200+p_A-p_B) \leq 200$ 3 $(400-2p_A+p_B) + 2(200+p_A-p_B) \leq 200$		

Formulácia	Riešenie	Interpretácia
min alebo max účelová funkcia ohraničenia	Lagrange KKT	hodnota účelovej funkcie Lagrangove násobiče aktívne ohraničenia
Firma vyrába dva druhy produktov: štandardný produkt A a sofistikovanú verziu B. Predaj produktov pri cene p_A a p_B bol odhadnutý na $400-2p_A+p_B$ kusov pre produkt A a na $200+p_A-p_B$ pre produkt B. Výroba jedného kusu produktu A vyžaduje 2 hodiny práce a 1 jednotku surovín, výroba produktu B zasa 3 hodiny práce a 2 jednotky surovín. Firma má k dispozícii 1000 hodín práce a 200 jednotiek surovín. $\begin{aligned} \max & 400p_A + 200p_B - 2p_A^2 - p_B^2 + 2p_Ap_B \\ \text{s.t.} & -p_A - p_B \leq -400 \\ & -p_B \leq -600 \end{aligned}$ Máme nerovnosti $\Rightarrow$ Karush-Kuhn-Tucker		



Karush-Kuhn-Tuckerove podmienky optimality

Uvažujme problém $\min f(x)$ s.t. $h_i(x) \leq 0$, $g_j(x) = 0$

Lagrangian: $\mathcal{L}(x, \lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_p) = f(x) + \sum \lambda_i h_i(x) + \sum \mu_j g_j(x)$

Potom sú $x^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*, \mu_1, \dots, \mu_p^*$ optimálnym riešením iba ak

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) + \sum \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) + \sum \mu_j^* \nabla g_j(x^*) &= 0 && \text{stacionarita} \\ h_i(x^*) &\leq 0 && \text{primárna zlučiteľnosť} \\ g_j(x^*) &= 0 \\ \lambda_i^* &\geq 0 && \text{duálna zlučiteľnosť} \\ \lambda_i^* h_i(x^*) &= 0 && \text{doplnková voľnosť} \end{aligned}$$

Ak je problém **konvexný** (teda $f(x)$, $h_i(x)$ sú konvexné funkcie a $g_j(x)$ sú lineárne), potom sú tieto podmienky aj **postačujúce**.

Formulácia	Riešenie	Interpretácia
min alebo max účelová funkcia ohraničenia	Lagrange KKT	hodnota účelovej funkcie Lagrangove násobiče aktívne ohraničenia
$\begin{aligned} \max \quad & 400p_A + 200p_B - 2p_A^2 - p_B^2 + 2p_Ap_B \\ \text{s.t.} \quad & -p_A - p_B \leq -400 \\ & -p_B \leq -600 \end{aligned}$  $\begin{aligned} \min \quad & -400p_A - 200p_B + 2p_A^2 + p_B^2 - 2p_Ap_B \\ \text{s.t.} \quad & -p_A - p_B \leq -400 \\ & -p_B \leq -600 \end{aligned}$		

Formulácia	Riešenie	Interpretácia
min alebo max účelová funkcia ohraničenia	Lagrange KKT	hodnota účelovej funkcie Lagrangove násobiče aktívne ohraničenia
$\begin{aligned} \min \quad & -400p_A - 200p_B + 2p_A^2 + p_B^2 - 2p_Ap_B \\ \text{s.t.} \quad & -p_A - p_B \leq -400 \\ & -p_B \leq -600 \end{aligned}$ $\mathcal{L} = -400p_A - 200p_B + 2p_A^2 + p_B^2 - 2p_Ap_B + \lambda_1(-p_A - p_B + 400) + \lambda_2(-p_B + 600)$ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_A} = -400 + 4p_A - 2p_B - \lambda_1 = 0$ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_B} = -200 + 2p_B - 2p_A - \lambda_2 = 0$ $\begin{aligned} -p_A - p_B &\leq -400 \\ -p_B &\leq -600 \\ \lambda_1 &\geq 0, \lambda_2 \geq 0 \\ \lambda_1(-p_A - p_B + 400) &= 0 \\ \lambda_2(-p_B + 600) &= 0 \end{aligned}$		
	stacionarita	
	primárna zlučiteľnosť	
	duálna zlučiteľnosť	
	doplnková voľnosť	

Formulácia	Riešenie	Interpretácia
min alebo max účelová funkcia ohraničenia	Lagrange KKT	hodnota účelovej funkcie Lagrangove násobiče aktívne ohraničenia
Možnosti aktívnych ohraničení: - žiadne nie je aktívne a teda $\lambda_1^*=0, \lambda_2^*=0$ - aktívne je $p_A+p_B=400$ - aktívne je $p_B=600$ - aktívne sú obidve ohraničenia		$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_A} = -400 + 4p_A - 2p_B - \lambda_1 = 0$ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_B} = -200 + 2p_B - 2p_A - \lambda_2 = 0$ $-p_A - p_B \leq -400$ $-p_B \leq -600$ $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ $\lambda_1(-p_A - p_B + 400) = 0$ $\lambda_2(-p_B + 600) = 0$

Formulácia	Riešenie	Interpretácia
min alebo max účelová funkcia ohraničenia	Lagrange KKT	hodnota účelovej funkcie Lagrangove násobiče aktívne ohraničenia
Možnosti aktívnych ohraničení: - žiadne nie je aktívne a teda $\lambda_1^*=0, \lambda_2^*=0$ - aktívne je $p_A+p_B=400$ - aktívne je $p_B=600$ - aktívne sú obidve ohraničenia Potom: - $p_A^* = 1200$ a $p_B^* = -400$ zo stacionarity - nie je splnená druhá podmienka primárnej zlučiteľnosti - preto toto riešenie nie je optimálne		$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_A} = -400 + 4p_A - 2p_B - \lambda_1 = 0$ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_B} = -200 + 2p_B - 2p_A - \lambda_2 = 0$ $-p_A - p_B \leq -400$ $-p_B \leq -600$ $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ $\lambda_1(-p_A - p_B + 400) = 0$ $\lambda_2(-p_B + 600) = 0$

Formulácia	Riešenie	Interpretácia
min alebo max účelová funkcia ohraničenia	Lagrange KKT	hodnota účelovej funkcie Lagrangove násobiče aktívne ohraničenia

Možnosti aktívnych ohraničení: - žiadne nie je aktívne a teda $\lambda_1^*=0, \lambda_2^*=0$ - aktívne je $p_A+p_B=400$ - aktívne je $p_B=600$ - aktívne sú obidve ohraničenia Potom: - $\lambda_2^* = 0$ keďže druhé ohraničenie je neaktívne - $p_A^* = 150, p_B^* = 250$ a $\lambda_1^* = -300$ zo stacionarity a aktívneho ohraničenia (3 rovnice o 3 neznám.) - neplatí druhá podmienka primárnej a prvá podmienka duálnej zlučiteľnosti - preto toto riešenie nie je optimálne	$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_A} = -400 + 4p_A - 2p_B - \lambda_1 = 0$ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_B} = -200 + 2p_B - 2p_A - \lambda_2 = 0$ $-p_A - p_B \leq -400$ $-p_B \leq -600$ $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ $\lambda_1(-p_A - p_B + 400) = 0$ $\lambda_2(-p_B + 600) = 0$
--	--

Formulácia	Riešenie	Interpretácia
min alebo max účelová funkcia ohraničenia	Lagrange KKT	hodnota účelovej funkcie Lagrangove násobiče aktívne ohraničenia

Možnosti aktívnych ohraničení: - žiadne nie je aktívne a teda $\lambda_1^*=0, \lambda_2^*=0$ - aktívne je $p_A+p_B=400$ - aktívne je $p_B=600$ - aktívne sú obidve ohraničenia Potom: - $p_B^* = 600$ priamo z aktivity ohraničenia - $\lambda_1^* = 0$ keďže prvé ohraničenie je neaktívne - $p_A^* = 400, \lambda_2^* = 200$ zo stacionarity (2 rovnice o 2 neznámych po dosadení p_B^* a λ_1^*) - primárne a duálne zlučiteľné riešenie, platí aj doplnková voľnosť - ak je problém konvexný, máme optimálne riešenie	$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_A} = -400 + 4p_A - 2p_B - \lambda_1 = 0$ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_B} = -200 + 2p_B - 2p_A - \lambda_2 = 0$ $-p_A - p_B \leq -400$ $-p_B \leq -600$ $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ $\lambda_1(-p_A - p_B + 400) = 0$ $\lambda_2(-p_B + 600) = 0$
--	--

Formulácia	Riešenie	Interpretácia
min alebo max účelová funkcia ohraničenia	Lagrange KKT	hodnota účelovej funkcie Lagrangove násobiče aktívne ohraničenia
Možnosti aktívnych ohraničení: - žiadne nie je aktívne a teda $\lambda_1^*=0, \lambda_2^*=0$ - aktívne je $p_A+p_B=400$ - aktívne je $p_B=600$ - aktívne sú obidve ohraničenia Potom: - $p_A^* = -200$ a $p_B^* = 600$ z aktívnych ohraničení - $\lambda_1^* = -2400$ a $\lambda_2^* = 1400$ zo stacionarity - neplatí prvá podmienka duálnej zlučiteľnosti - preto toto riešenie nie je optimálne		$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_A} = -400 + 4p_A - 2p_B - \lambda_1 = 0$ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_B} = -200 + 2p_B - 2p_A - \lambda_2 = 0$ $-p_A - p_B \leq -400$ $-p_B \leq -600$ $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$ $\lambda_1(-p_A - p_B + 400) = 0$ $\lambda_2(-p_B + 600) = 0$

Formulácia	Riešenie	Interpretácia
min alebo max účelová funkcia ohraničenia	Lagrange simplex	hodnota účelovej funkcie Lagrangove násobiče aktívne ohraničenia
Firma vyrába dva druhy produktov: štandardný produkt A a sofistikovanú verziu B. Predaj produktov pri cene p_A a p_B bol odhadnutý na $400-2p_A+p_B$ kusov pre produkt A a na $200+p_A-p_B$ pre produkt B. Výroba jedného kusu produktu A vyžaduje 2 hodiny práce a 1 jednotku surovín, výroba produktu B zasa 3 hodiny práce a 2 jednotky surovín. Firma má k dispozícii 1000 hodín práce a 200 jednotiek surovín. Otázky: - aké je optimálne nastavenie cien p_A a p_B, aby bol najväčší príjem z predaja? - aký bude optimálny zisk, ak hodina práce stojí 5€ a jednotka suroviny 200€? - oplatí sa v záujme zvýšenia zisku zvýšiť limit práce a surovín?		

Formulácia	Riešenie	Interpretácia
min alebo max	Lagrange	hodnota účelovej funkcie
účelová funkcia	KKT	Lagrangove násobiče
ohraničenia	simplex	aktívne ohraničenia

$$\begin{aligned} \max \quad & 400p_A + 200p_B - 2p_A^2 - p_B^2 + 2p_Ap_B \\ \text{s.t.} \quad & -p_A - p_B \leq -400 \\ & -p_B \leq -600 \end{aligned}$$

Optimálne riešenie:

- $p_A^* = 400\text{€}$
- $p_B^* = 600\text{€}$
- $\lambda_1^* = 0$
- $\lambda_2^* = 200$

Formulácia	Riešenie	Interpretácia
min alebo max	Lagrange	hodnota účelovej funkcie
účelová funkcia	KKT	Lagrangove násobiče
ohraničenia	simplex	aktívne ohraničenia

Firma vyrába dva druhy produktov: štandardný produkt A a sofistikovanú verziu B. Predaj produktov pri cene p_A a p_B bol odhadnutý na $400 - 2p_A + p_B$ kusov pre produkt A a na $200 + p_A - p_B$ pre produkt B. Výroba jedného kusu produktu A vyžaduje 2 hodiny práce a 1 jednotku surovín, výroba produktu B zasa 3 hodiny práce a 2 jednotky surovín. Firma má k dispozícii 1000 hodín práce a 200 jednotiek surovín.

Otázky:

- aké je optimálne nastavenie cien p_A a p_B , aby bol najväčší príjem z predaja?
- aký bude optimálny zisk, ak hodina práce stojí 5€ a jednotka suroviny 200€?
- oplatí sa v záujme zvýšenia zisku zvýšiť limit práce a surovín?

Formulácia	Riešenie	Interpretácia
min alebo max	Lagrange	hodnota účelovej funkcie
účelová funkcia	KKT	Lagrangove násobiče
ohraničenia	simplex	aktívne ohraničenia

Počet predaných kusov:

- produkt A: $q_A^* = (400 - 2p_A^* + p_B^*) = 200$
- produkt B: $q_B^* = (200 + p_A^* - p_B^*) = 0$

Príjem z predaja:

- $q_A^* \cdot p_A^* + q_B^* \cdot p_B^* = 80000\text{€}$

Náklady na prácu a suroviny:

- práca: $(2q_A^* + 3q_B^*) \cdot 5\text{€} = 2000\text{€}$
- suroviny: $(q_A^* + 2q_B^*) \cdot 200\text{€} = 40000\text{€}$

Zisk:

- príjmy - náklady = 38000€

Formulácia	Riešenie	Interpretácia
min alebo max	Lagrange	hodnota účelovej funkcie
účelová funkcia	KKT	Lagrangove násobiče
ohraničenia	simplex	aktívne ohraničenia

Firma vyrába dva druhy produktov: štandardný produkt A a sofistikovanú verziu B. Predaj produktov pri cene p_A a p_B bol odhadnutý na $400 - 2p_A + p_B$ kusov pre produkt A a na $200 + p_A - p_B$ pre produkt B. Výroba jedného kusu produktu A vyžaduje 2 hodiny práce a 1 jednotku surovín, výroba produktu B zasa 3 hodiny práce a 2 jednotky surovín. Firma má k dispozícii 1000 hodín práce a 200 jednotiek surovín.

Otázky:

- aké je optimálne nastavenie cien p_A a p_B , aby bol najväčší príjem z predaja?
- aký bude optimálny zisk, ak hodina práce stojí 5€ a jednotka suroviny 200€?
- **oplatí sa v záujme zvýšenia zisku zvýšiť limit práce a surovín?**

Formulácia	Riešenie	Interpretácia
min alebo max	Lagrange	hodnota účelovej funkcie
účelová funkcia	KKT	Lagrangove násobiče
ohraničenia	simplex	aktívne ohraničenia

$$\max 400p_A + 200p_B - 2p_A^2 - p_B^2 + 2p_Ap_B$$

$$\text{s.t. } -p_A - p_B \leq -400 \quad \text{limit na prácu}$$

$$-p_B \leq -600 \quad \text{limit na suroviny}$$

Optimálne riešenie:

- $p_A^* = 400\text{€}$
- $p_B^* = 600\text{€}$
- $\lambda_1^* = 0$ ohraničenie nie je aktívne, jeho zvýšenie neovplyvní účelovku
- $\lambda_2^* = 200$ ohraničenie je aktívne, jeho zvýšenie o Δ zmení účelovku o $\lambda_2^*\Delta$

Formulácia	Riešenie	Interpretácia
min alebo max	Lagrange	hodnota účelovej funkcie
účelová funkcia	simplex	Lagrangove násobiče
ohraničenia	KKT	aktívne ohraničenia

Firma vyrába dva druhy produktov: štandardný produkt A a sofistikovaný verziu B. Predaj produktov pri cene p_A a p_B bol odhadnutý na $400-2p_A+p_B$ kusov pre produkt A a na $200+p_A-p_B$ pre produkt B. Výroba jedného kusu produktu A vyžaduje 2 hodiny práce a 1 jednotku surovín, výroba produktu B zasa 3 hodiny práce a 2 jednotky surovín. Firma má k dispozícii 1000 hodín práce a 200 jednotiek surovín.

- 1 $\max p_A + p_B$
- 2 $\max (400-2p_A+p_B) + (200+p_A-p_B)$
- 3 $\max p_A(400-2p_A+p_B) + p_B(200+p_A-p_B)$

Formulácia	Riešenie	Interpretácia
min alebo max účelová funkcia ohraničenia	Lagrange simplex KKT	hodnota účelovej funkcie Lagrangove násobiče aktívne ohraničenia
Firma vyrába dva druhy produktov: štandardný produkt A a sofistikovanú verziu B. Predaj produktov pri cene p_A a p_B bol odhadnutý na $400-2p_A+p_B$ kusov pre produkt A a na $200+p_A-p_B$ pre produkt B. Výroba jedného kusu produktu A vyžaduje 2 hodiny práce a 1 jednotku surovín, výroba produktu B zasa 3 hodiny práce a 2 jednotky surovín. Firma má k dispozícii 1000 hodín práce a 200 jednotiek surovín. 1 $\max p_A + p_B$ 2 $\max (400-2p_A+p_B) + (200+p_A-p_B)$ 3 $\max p_A(400-2p_A+p_B) + p_B(200+p_A-p_B)$		

Formulácia	Riešenie	Interpretácia
min alebo max účelová funkcia ohraničenia	Lagrange KKT	hodnota účelovej funkcie Lagrangove násobiče aktívne ohraničenia
Firma vyrába dva druhy produktov: štandardný produkt A a sofistikovanú verziu B. Predaj produktov pri cene p_A a p_B bol odhadnutý na $400-2p_A+p_B$ kusov pre produkt A a na $200+p_A-p_B$ pre produkt B. Výroba jedného kusu produktu A vyžaduje 2 hodiny práce a 1 jednotku surovín, výroba produktu B zasa 3 hodiny práce a 2 jednotky surovín. Firma má k dispozícii neobmedzené množstvo práce, ale musí spotrebovať presne 200 jednotiek surovín. Hodina práce stojí 5€ a jednotka suroviny 200€. Otázky: - aké sú optimálne ceny p_A a p_B, aby bol najväčší zisk? - o koľko sa približne zmení zisk, ak sa zásoba surovín zvýši o 10%?		

Formulácia	Riešenie	Interpretácia
min alebo max	Lagrange	hodnota účelovej funkcie
účelová funkcia	KKT	Lagrangove násobiče
ohraničenia		aktívne ohraničenia

Firma vyrába dva druhy produktov: štandardný produkt A a sofistikovanú verziu B. Predaj produktov pri cene p_A a p_B bol odhadnutý na $400 - 2p_A + p_B$ kusov pre produkt A a na $200 + p_A - p_B$ pre produkt B. Výroba jedného kusu produktu A vyžaduje 2 hodiny práce a 1 jednotku surovín, výroba produktu B zasa 3 hodiny práce a 2 jednotky surovín. Firma má k dispozícii neobmedzené množstvo práce, ale musí spotrebovať presne 200 jednotiek surovín. Hodina práce stojí 5€ a jednotka suroviny 200€.

$$\begin{aligned} \max \quad & q_A(p_A - 2 \cdot 5 - 1 \cdot 200) + q_B(p_B - 3 \cdot 5 - 2 \cdot 200) \\ \text{s.t.} \quad & q_A + 2q_B = 200 \\ & q_A = 400 - 2p_A + p_B \\ & q_B = 200 + p_A - p_B \end{aligned}$$

Formulácia	Riešenie	Interpretácia
min alebo max	Lagrange	hodnota účelovej funkcie
účelová funkcia	KKT	Lagrangove násobiče
ohraničenia		aktívne ohraničenia

Firma vyrába dva druhy produktov: štandardný produkt A a sofistikovanú verziu B. Predaj produktov pri cene p_A a p_B bol odhadnutý na $400 - 2p_A + p_B$ kusov pre produkt A a na $200 + p_A - p_B$ pre produkt B. Výroba jedného kusu produktu A vyžaduje 2 hodiny práce a 1 jednotku surovín, výroba produktu B zasa 3 hodiny práce a 2 jednotky surovín. Firma má k dispozícii neobmedzené množstvo práce, ale musí spotrebovať presne 200 jednotiek surovín. Hodina práce stojí 5€ a jednotka suroviny 200€.

$$\begin{aligned} \max \quad & q_A(p_A - 2 \cdot 5 - 1 \cdot 200) + q_B(p_B - 3 \cdot 5 - 2 \cdot 200) \\ \text{s.t.} \quad & q_A + 2q_B = 200 \\ & q_A = 400 - 2p_A + p_B \\ & q_B = 200 + p_A - p_B \end{aligned}$$

Diferencovateľná účelová funkcia a rovnosti $\Rightarrow$ Lagrangeova metóda

Formulácia	Riešenie	Interpretácia
min alebo max účelová funkcia ohraničenia	Lagrange KKT	hodnota účelovej funkcie Lagrangove násobiče aktívne ohraničenia
$\max q_A(p_A - 2 \cdot 5 - 1 \cdot 200) + q_B(p_B - 3 \cdot 5 - 2 \cdot 200)$ $\text{s.t. } q_A + 2q_B = 200$ $q_A = 400 - 2p_A + p_B$ $q_B = 200 + p_A - p_B$		
1	$\mathcal{L} = -q_A(p_A - 210) - q_B(p_B - 415) + \mu_1(q_A + 2q_B - 200) + \dots$ $+ \mu_2(q_A - 400 + 2p_A - p_B) + \mu_3(q_B - 200 - p_A + p_B)$	
2	$\nabla \mathcal{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_A} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_B} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_A} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_B} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_1} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_2} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q_A + \mu_1 + 2\mu_2 - \mu_3 \\ -q_B + 2\mu_1 - \mu_2 + \mu_3 \\ -p_A + 210 + \mu_1 + \mu_2 \\ -p_B + 415 + 2\mu_1 + \mu_3 \\ q_A + 2q_B - 200 \\ q_A - 400 + 2p_A - p_B \\ q_B - 200 - p_A + p_B \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$	
	$\begin{aligned} p_A^* &= 400 \\ p_B^* &= 600 \\ q_A^* &= 200 \\ q_B^* &= 0 \\ \mu_1^* &= 5 \\ \mu_2^* &= 185 \\ \mu_3^* &= 175 \end{aligned}$	

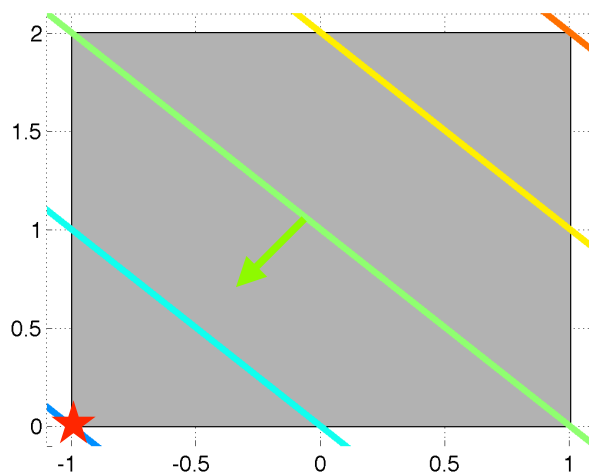
Formulácia	Riešenie	Interpretácia
min alebo max účelová funkcia ohraničenia	Lagrange KKT	hodnota účelovej funkcie Lagrangove násobiče aktívne ohraničenia
$\max q_A(p_A - 2 \cdot 5 - 1 \cdot 200) + q_B(p_B - 3 \cdot 5 - 2 \cdot 200)$ $\text{s.t. } q_A + 2q_B = 200$ $q_A = 400 - 2p_A + p_B$ $q_B = 200 + p_A - p_B$		
Otázky: - aké sú optimálne ceny p_A a p_B, aby bol najväčší zisk? - o koľko sa približne zmení zisk, ak sa zásoba surovín zvýši o 10%?		
$\begin{aligned} p_A^* &= 400 \\ p_B^* &= 600 \\ q_A^* &= 200 \\ q_B^* &= 0 \\ \mu_1^* &= 5 \\ \mu_2^* &= 185 \\ \mu_3^* &= 175 \end{aligned}$		
hodnota účelovej funkcie sa zmení približne o $-\mu^* \Delta$, teda zisk klesne		

Formulácia	Riešenie	Interpretácia
min alebo max účelová funkcia ohraničenia	Lagrange KKT	hodnota účelovej funkcie Lagrangove násobiče aktívne ohraničenia
$\begin{aligned} \max \quad & q_A(p_A - 2 \cdot 5 - 1 \cdot 200) + q_B(p_B - 3 \cdot 5 - 2 \cdot 200) \quad J^* = 38000 \\ \text{s.t.} \quad & q_A + 2q_B = 200 \\ & q_A = 400 - 2p_A + p_B \\ & q_B = 200 + p_A - p_B \end{aligned}$		
$\begin{aligned} \max \quad & q_A(p_A - 2 \cdot 5 - 1 \cdot 200) + q_B(p_B - 3 \cdot 5 - 2 \cdot 200) \quad J^* = 37611 \\ \text{s.t.} \quad & q_A + 2q_B = 220 \\ & q_A = 400 - 2p_A + p_B \\ & q_B = 200 + p_A - p_B \end{aligned}$		
$\begin{aligned} \max \quad & q_A(p_A - 2 \cdot 5 - 1 \cdot 200) + q_B(p_B - 3 \cdot 5 - 2 \cdot 200) \quad J^* = 38028 \\ \text{s.t.} \quad & q_A + 2q_B = 190 \\ & q_A = 400 - 2p_A + p_B \\ & q_B = 200 + p_A - p_B \end{aligned}$		

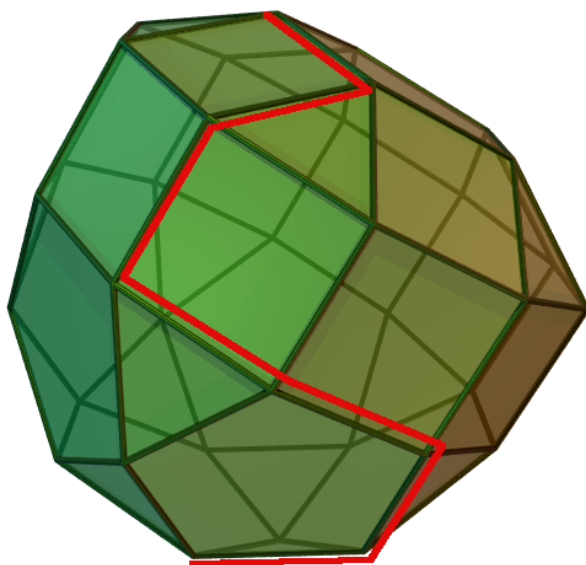
Lineárne programovanie: simplexová metóda

Michal Kvasnica

Lineárne programovanie



Lineárne programovanie





George B. Dantzig

George B. Dantzig
(1914 - 2005)

Lineárne programovanie

$$\min_x c^T x$$

$$\text{s.t. } Ax = b \\ x \geq 0$$

$$\min_x c^T x$$

$$\text{s.t. } Ax \leq b$$

$$\max_x c^T x$$

$$\text{s.t. } Ax \leq b$$

$$\max_x c^T x$$

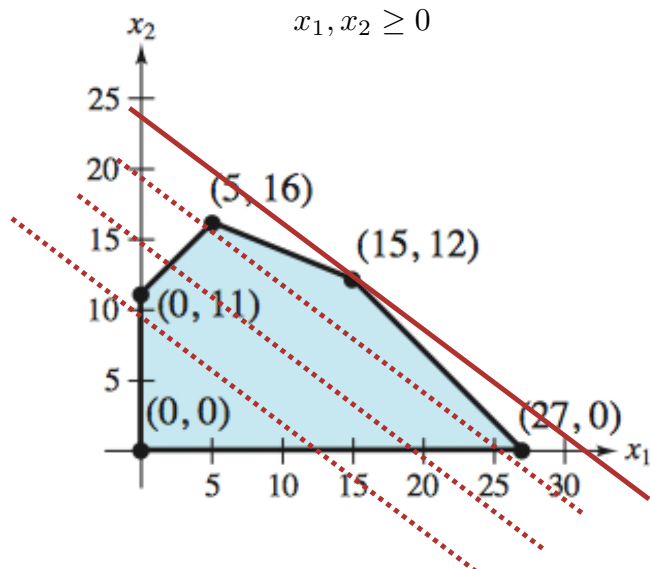
$$\text{s.t. } Ax = b \\ x \geq 0$$

Príklady:

- diétny problém
- separácia
- klasifikácia
- distribúcia
- ...

Grafická interpretácia

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 \leq 11 \\ & x_1 + x_2 \leq 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 \leq 90 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Simplexová metóda

$$\begin{aligned} \max \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{s.t.} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ & x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

Všeobecný postup:

1. vytvorenie simplexovej tabuľky
2. rozoznanie optimality (ak sú všetky koeficienty posledného riadku kladné)
3. určenie pivotovacej premennej
 - stĺpec s najmenšou negatívnou hodnotou v poslednom riadku
 - riadok s najmenším nenegatívnym pomerom b_i/a_{ij}
4. pivotovanie pomocou elementárnych riadkových operácií
5. opakovať od bodu 2

Úprava do štandardného tvaru

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 \leq 11 \\ & x_1 + x_2 \leq 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 \leq 90 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Zavedenie doplnkových premenných (slackov):

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Simplexová tabuľka

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
-1	1	1	0	0	11
1	1	0	1	0	27
2	5	0	0	1	90
-4	-6	0	0	0	0

Klasifikácia premenných:

- bázické, ak v danom stĺpci je iba jedna jednotka (x_3, x_4, x_5)
- nebázické sú ostatné (x_1, x_2)

Simplexová tabuľka

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
-1	1	1	0	0	11
1	1	0	1	0	27
2	5	0	0	1	90
-4	-6	0	0	0	0

Zlučiteľné riešenie:

- nebázické premenné = 0 ($x_1=0$, $x_2=0$)
- bázické premenné = pravá strana ohraničení ($x_3=11$, $x_4=27$, $x_5=90$)
- účelová funkcia: 0

Simplexová tabuľka

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
-1	1	1	0	0	11
1	1	0	1	0	27
2	5	0	0	1	90
-4	-6	0	0	0	0



Zmena ktorej premennej má najväčší vplyv na účelovú funkciu?

Simplexová tabuľka

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
-1	1	1	0	0	11	←
1	1	0	1	0	27	
2	5	0	0	1	90	
-4	-6	0	0	0	0	

Ktoré ohraničenie je "najrizikovejšie" pri zvýšení x_2 ?

Simplexová tabuľka

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
-1	1	1	0	0	11	←
1	1	0	1	0	27	
2	5	0	0	1	90	
-4	-6	0	0	0	0	

Pivotovanie = elementárne riadkové operácie, pokým

- pri x_2 nie je jednotka
- v stĺpci premennej x_2 sú v ostatných riadkoch nuly

Simplexová tabuľka

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
-1	1	1	0	0	11
1	1	0	1	0	27
2	5	0	0	1	90
-4	-6	0	0	0	0

-prvý riadok

Pivotovanie = elementárne riadkové operácie, pokým

- pri x_2 nie je jednotka
- v stĺpci premennej x_2 sú v ostatných riadkoch nuly

Simplexová tabuľka

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
-1	1	1	0	0	11
2	0	-1	1	0	16
2	5	0	0	1	90
-4	-6	0	0	0	0

-prvý riadok

Pivotovanie = elementárne riadkové operácie, pokým

- pri x_2 nie je jednotka
- v stĺpci premennej x_2 sú v ostatných riadkoch nuly

Simplexová tabuľka

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
-1	1	1	0	0	11
2	0	-1	1	0	16
2	5	0	0	1	90
-4	-6	0	0	0	0

-5x prvý riadok

Pivotovanie = elementárne riadkové operácie, pokým

- pri x_2 nie je jednotka
- v stĺpci premennej x_2 sú v ostatných riadkoch nuly

Simplexová tabuľka

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
-1	1	1	0	0	11
2	0	-1	1	0	16
7	0	-5	0	1	35
-4	-6	0	0	0	0

-5x prvý riadok

Pivotovanie = elementárne riadkové operácie, pokým

- pri x_2 nie je jednotka
- v stĺpci premennej x_2 sú v ostatných riadkoch nuly

Simplexová tabuľka

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
-1	1	1	0	0	11
2	0	-1	1	0	16
7	0	-5	0	1	35
-4	-6	0	0	0	0

+6x prvý riadok

Pivotovanie = elementárne riadkové operácie, pokým

- pri x_2 nie je jednotka
- v stĺpci premennej x_2 sú v ostatných riadkoch nuly

Simplexová tabuľka

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
-1	1	1	0	0	11
2	0	-1	1	0	16
7	0	-5	0	1	35
-10	0	6	0	0	66

+6x prvý riadok

Pivotovanie = elementárne riadkové operácie, pokým

- pri x_2 nie je jednotka
- v stĺpci premennej x_2 sú v ostatných riadkoch nuly

Simplexová tabuľka

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
-1	1	1	0	0	11
2	0	-1	1	0	16
7	0	-5	0	1	35
-10	0	6	0	0	66

Klasifikácia premenných:

- bázické, ak v danom stĺpci je iba jedna jednotka (x_2, x_4, x_5)
- nebázické sú ostatné (x_1, x_3)

Simplexová tabuľka

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
-1	1	1	0	0	11
2	0	-1	1	0	16
7	0	-5	0	1	35
-10	0	6	0	0	66

Zlučiteľné riešenie:

- nebázické premenné = 0 ($x_1=0, x_3=0$)
- bázické premenné = pravá strana ohraničení ($x_2=11, x_4=16, x_5=35$)
- účelová funkcia: 66

Simplexová tabuľka

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
-1	1	1	0	0	11
2	0	-1	1	0	16
7	0	-5	0	1	35
-10	0	6	0	0	66

Pivotujeme dokým v poslednom riadku sú záporné hodnoty

Simplexová tabuľka

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
-1	1	1	0	0	11
2	0	-1	1	0	16
7	0	-5	0	1	35
-10	0	6	0	0	66



Zmena ktorej premennej má najväčší vplyv na účelovú funkciu?

Simplexová tabuľka

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
-1	1	1	0	0	11
2	0	-1	1	0	16
7	0	-5	0	1	35
-10	0	6	0	0	66



Ktoré ohraničenie je "najrizikovejšie" pri zvýšení x_1 ?

Simplexová tabuľka

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
-1	1	1	0	0	11
2	0	-1	1	0	16
7	0	-5	0	1	35
-10	0	6	0	0	66



Pivotovanie = elementárne riadkové operácie, pokým

- pri x_1 nie je jednotka
- v stĺpci premennej x_1 sú v ostatných riadkoch nuly

Simplexová tabuľka

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
-1	1	1	0	0	11
2	0	-1	1	0	16
7	0	-5	0	1	35
-10	0	6	0	0	66

+1/7x tretí riadok

Pivotovanie = elementárne riadkové operácie, pokým

- pri x_1 nie je jednotka
- v stĺpci premennej x_1 sú v ostatných riadkoch nuly

Simplexová tabuľka

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	1	2/7	0	1/7	16
2	0	-1	1	0	16
7	0	-5	0	1	35
-10	0	6	0	0	66

+1/7x tretí riadok

Pivotovanie = elementárne riadkové operácie, pokým

- pri x_1 nie je jednotka
- v stĺpci premennej x_1 sú v ostatných riadkoch nuly

Simplexová tabuľka

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	1	$2/7$	0	$1/7$	16
2	0	-1	1	0	16
7	0	-5	0	1	35
-10	0	6	0	0	66

$-2/7 \times$ tretí riadok

Pivotovanie = elementárne riadkové operácie, pokým

- pri x_1 nie je jednotka
- v stĺpci premennej x_1 sú v ostatných riadkoch nuly

Simplexová tabuľka

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	1	$2/7$	0	$1/7$	16
0	0	$3/7$	1	$-2/7$	6
7	0	-5	0	1	35
-10	0	6	0	0	66

$-2/7 \times$ tretí riadok

Pivotovanie = elementárne riadkové operácie, pokým

- pri x_1 nie je jednotka
- v stĺpci premennej x_1 sú v ostatných riadkoch nuly

Simplexová tabuľka

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	1	$2/7$	0	$1/7$	16
0	0	$3/7$	1	$-2/7$	6
7	0	-5	0	1	35
-10	0	6	0	0	66

+10/7x tretí riadok

Pivotovanie = elementárne riadkové operácie, pokým

- pri x_1 nie je jednotka
- v stĺpci premennej x_1 sú v ostatných riadkoch nuly

Simplexová tabuľka

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	1	$2/7$	0	$1/7$	16
0	0	$3/7$	1	$-2/7$	6
7	0	-5	0	1	35
0	0	-8/7	0	10/7	116

+10/7x tretí riadok

Pivotovanie = elementárne riadkové operácie, pokým

- pri x_1 nie je jednotka
- v stĺpci premennej x_1 sú v ostatných riadkoch nuly

Simplexová tabuľka

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
0	1	$2/7$	0	$1/7$	16	
0	0	$3/7$	1	$-2/7$	6	
7	0	-5	0	1	35	/7
0	0	$-8/7$	0	$10/7$	116	

Pivotovanie = elementárne riadkové operácie, pokým

- pri x_1 nie je jednotka
- v stĺpci premennej x_1 sú v ostatných riadkoch nuly

Simplexová tabuľka

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
0	1	$2/7$	0	$1/7$	16	
0	0	$3/7$	1	$-2/7$	6	
1	0	$-5/7$	0	$1/7$	5	/7
0	0	$-8/7$	0	$10/7$	116	

Pivotovanie = elementárne riadkové operácie, pokým

- pri x_1 nie je jednotka
- v stĺpci premennej x_1 sú v ostatných riadkoch nuly

Simplexová tabuľka

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	1	$2/7$	0	$1/7$	16
0	0	$3/7$	1	$-2/7$	6
1	0	$-5/7$	0	$1/7$	5
0	0	$-8/7$	0	$10/7$	116

Klasifikácia premenných:

- bázické, ak v danom stĺpci je iba jedna jednotka (x_1 , x_2 , x_4)
- nebázické sú ostatné (x_3 , x_5)

Simplexová tabuľka

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	1	$2/7$	0	$1/7$	16
0	0	$3/7$	1	$-2/7$	6
1	0	$-5/7$	0	$1/7$	5
0	0	$-8/7$	0	$10/7$	116

Zlučiteľné riešenie:

- nebázické premenné = 0 ($x_3=0$, $x_5=0$)
- bázické premenné = pravá strana ohraničení ($x_1=5$, $x_2=16$, $x_4=6$)
- účelová funkcia: 116

Simplexová tabuľka

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	1	$2/7$	0	$1/7$	16
0	0	$3/7$	1	$-2/7$	6
1	0	$-5/7$	0	$1/7$	5
0	0	$-8/7$	0	$10/7$	116

Pivotujeme dokým v poslednom riadku sú záporné hodnoty

Simplexová tabuľka

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	1	$2/7$	0	$1/7$	16
0	0	$3/7$	1	$-2/7$	6
1	0	$-5/7$	0	$1/7$	5
0	0	$-8/7$	0	$10/7$	116



Zmena ktorej premennej má najväčší vplyv na účelovú funkciu?

Simplexová tabuľka

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
0	1	$2/7$	0	$1/7$	16	
0	0	$3/7$	1	$-2/7$	6	←
1	0	$-5/7$	0	$1/7$	5	
0	0	$-8/7$	0	$10/7$	116	↑

Ktoré ohraničenie je "najrizikovejšie" pri zvýšení x_3 ?

Simplexová tabuľka

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	1	$2/7$	0	$1/7$	16
0	0	$3/7$	1	$-2/7$	6
1	0	$-5/7$	0	$1/7$	5
0	0	$-8/7$	0	$10/7$	116

Pivotovanie = elementárne riadkové operácie, pokým

- pri x_3 nie je jednotka
- v stĺpci premennej x_3 sú v ostatných riadkoch nuly

Simplexová tabuľka

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	1	2/7	0	1/7	16
0	0	3/7	1	-2/7	6
1	0	-5/7	0	1/7	5
0	0	-8/7	0	10/7	116

- 2/3 druhý riadok

Pivotovanie = elementárne riadkové operácie, pokým

- pri x_3 nie je jednotka
- v stĺpci premennej x_3 sú v ostatných riadkoch nuly

Simplexová tabuľka

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	1	0	-2/3	1/3	12
0	0	3/7	1	-2/7	6
1	0	-5/7	0	1/7	5
0	0	-8/7	0	10/7	116

- 2/3 druhý riadok

Pivotovanie = elementárne riadkové operácie, pokým

- pri x_3 nie je jednotka
- v stĺpci premennej x_3 sú v ostatných riadkoch nuly

Simplexová tabuľka

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	1	0	-2/3	1/3	12
0	0	3/7	1	-2/7	6
1	0	-5/7	0	1/7	5
0	0	-8/7	0	10/7	116

+ 5/3 druhý riadok

Pivotovanie = elementárne riadkové operácie, pokým

- pri x_3 nie je jednotka
- v stĺpci premennej x_3 sú v ostatných riadkoch nuly

Simplexová tabuľka

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	1	0	-2/3	1/3	12
0	0	3/7	1	-2/7	6
1	0	0	5/3	-1/3	15
0	0	-8/7	0	10/7	116

+ 5/3 druhý riadok

Pivotovanie = elementárne riadkové operácie, pokým

- pri x_3 nie je jednotka
- v stĺpci premennej x_3 sú v ostatných riadkoch nuly

Simplexová tabuľka

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	1	0	-2/3	1/3	12
0	0	3/7	1	-2/7	6
1	0	0	5/3	-1/3	15
0	0	-8/7	0	10/7	116

+ 8/3 druhý riadok

Pivotovanie = elementárne riadkové operácie, pokým

- pri x_3 nie je jednotka
- v stĺpci premennej x_3 sú v ostatných riadkoch nuly

Simplexová tabuľka

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	1	0	-2/3	1/3	12
0	0	3/7	1	-2/7	6
1	0	0	5/3	-1/3	15
0	0	0	8/3	2/3	132

+ 8/3 druhý riadok

Pivotovanie = elementárne riadkové operácie, pokým

- pri x_3 nie je jednotka
- v stĺpci premennej x_3 sú v ostatných riadkoch nuly

Simplexová tabuľka

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
0	1	0	-2/3	1/3	12	
0	0	3/7	1	-2/7	6	$\times 7/3$
1	0	0	5/3	-1/3	15	
0	0	0	8/3	2/3	132	

Pivotovanie = elementárne riadkové operácie, pokým

- pri x_3 nie je jednotka
- v stĺpci premennej x_3 sú v ostatných riadkoch nuly

Simplexová tabuľka

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
0	1	0	-2/3	1/3	12	
0	0	1	7/3	-2/3	14	$\times 7/3$
1	0	0	5/3	-1/3	15	
0	0	0	8/3	2/3	132	

Pivotovanie = elementárne riadkové operácie, pokým

- pri x_3 nie je jednotka
- v stĺpci premennej x_3 sú v ostatných riadkoch nuly

Simplexová tabuľka

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	1	0	-2/3	1/3	12
0	0	1	7/3	-2/3	14
1	0	0	5/3	-1/3	15
0	0	0	8/3	2/3	132

Zlučiteľné riešenie:

- nebázické premenné = 0 ($x_4=0$, $x_5=0$)
- bázické premenné = pravá strana ohraničení ($x_1=15$, $x_2=12$, $x_3=14$)
- účelová funkcia: 132

Simplexová tabuľka

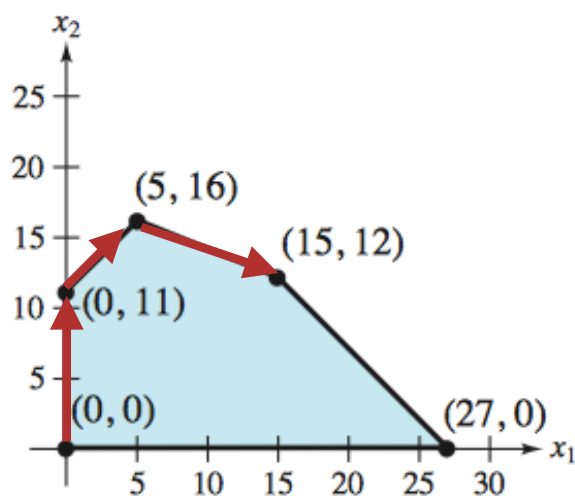
$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	1	0	-2/3	1/3	12
0	0	1	7/3	-2/3	14
1	0	0	5/3	-1/3	15
0	0	0	8/3	2/3	132

Pivotujeme dokým v poslednom riadku sú záporné hodnoty.

Ak také nie sú, bolo nájdené optimálne riešenie.

Grafická interpretácia



$$\begin{array}{ll} \min_x c^T x & \Rightarrow \max_z \tilde{c}^T z \\ \text{s.t. } Ax \leq b & \text{s.t. } \tilde{A}z = \tilde{b} \\ & z \geq 0 \end{array}$$

- 1 Konverzia na rovnosti cez doplnkové premenné:

$$Ax \leq b \Rightarrow Ax + Is = b, s \geq 0$$

- 2 Konverzia kladných/záporných hodnôt x na nezáporné:

$$x = x^+ - x^- \Rightarrow A(x^+ - x^-) + Is = b, s \geq 0, x^+ \geq 0, x^- \geq 0$$

- 3 Konverzia minimalizácie na maximalizáciu

$$\min c^T x \Rightarrow \min c^T (x^+ - x^-) \Rightarrow \max -c^T (x^+ - x^-)$$

Prevody medzi štandardnými tvarmi

$$\begin{array}{ll} \min_x c^T x & \Rightarrow \max_{x^+, x^-, s} [-c^T \quad c^T \quad 0] \begin{bmatrix} x^+ \\ x^- \\ s \end{bmatrix} \\ \text{s.t. } Ax \leq b & \text{s.t. } [A \quad -A \quad I] \begin{bmatrix} x^+ \\ x^- \\ s \end{bmatrix} = b \\ & x^+ \geq 0, x^- \geq 0, s \geq 0 \end{array}$$

Príklad

$$\begin{array}{ll} \max & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} & -x_1 + x_2 \leq 11 \\ & x_1 + x_2 \leq 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 \leq 90 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Zavedenie doplnkových premenných (slackov):

$$\begin{array}{ll} \max & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Simplexová metóda

$$\begin{aligned} \max \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{s.t.} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ & x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

Všeobecný postup:

1. vytvorenie simplexovej tabuľky
2. rozoznanie optimality (ak sú všetky koeficienty posledného riadku kladné)
3. určenie pivotovacej premennej
 - stĺpec s najmenšou negatívnou hodnotou v poslednom riadku
 - riadok s najmenším nenegatívnym pomerom b_i/a_{ij}
4. pivotovanie pomocou elementárnych riadkových operácií
5. opakovať od bodu 2

Prekvapenia simplexovej metódy

Michal Kvasnica

Prekvapenia simplexovej metódy

Vplyv heuristiky

Viacnásobné optimá

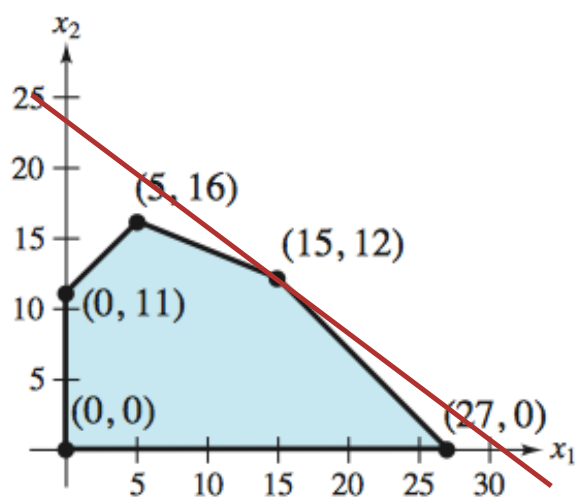
Degenerovanosť a cyklenie

Neohraničenosť

Neriešiteľnosť

Vykúpenie

Simplexová metóda je heuristika



Simplexová metóda je heuristika

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
-1	1	1	0	0	11
1	1	0	1	0	27
2	5	0	0	1	90
-4	-6	0	0	0	0



Zmena ktorej premennej má najväčší vplyv na účelovú funkciu?

Simplexová metóda je heuristika

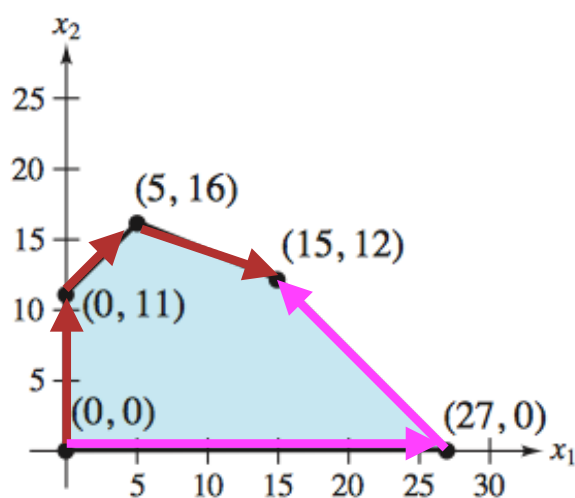
$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 6x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 27 \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 90 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
-1	1	1	0	0	11
1	1	0	1	0	27
2	5	0	0	1	90
-4	-6	0	0	0	0



Ktoré ohraničenie je “najrizikovejšie” pri zvýšení x_2 ?

Simplexová metóda je heuristika



Prekvapenia simplexovej metódy

Vplyv heuristiky

Viacnásobné optimá

Degenerovanosť a cyklenie

Neohraničenosť

Neriešiteľnosť

Vykúpenie

Viacnásobné optimá: príklad

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 0.5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Konverzia na rovnosti cez doplnkové premenné:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 0.5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Viacnásobné optimá: príklad

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 0.5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Viacnásobné optimá: príklad

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 0.5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Simplexová tabuľka:

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
→	2	1	1	0	4
	1	2	0	1	3
	-1	-0,5	0	0	0
↑					

Viacnásobné optimá: príklad

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 0.5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Simplexová tabuľka:

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
→	2	1	1	0	4
	1	2	0	1	3
	-1	-0,5	0	0	0
↑					

-1/2x prvý riadok

Viacnásobné optimá: príklad

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 0.5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Simplexová tabuľka:

	x_1	x_2	x_3	x_4	b	
	2	1	1	0	4	
	0	1,5	-0,5	1	1	-1/2x prvý riadok
	-1	-0,5	0	0	0	
						

Viacnásobné optimá: príklad

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 0.5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Simplexová tabuľka:

	x_1	x_2	x_3	x_4	b	
	2	1	1	0	4	
	0	1,5	-0,5	1	1	
	-1	-0,5	0	0	0	+1/2x prvý riadok
						

Viacnásobné optimá: príklad

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 0.5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Simplexová tabuľka:

	x_1	x_2	x_3	x_4	b	
	2	1	1	0	4	
	0	1,5	-0,5	1	1	
	0	0	0,5	0	2	+1/2x prvý riadok
						

Viacnásobné optimá: príklad

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 0.5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Simplexová tabuľka:

	x_1	x_2	x_3	x_4	b	
	2	1	1	0	4	/2
	0	1,5	-0,5	1	1	
	0	0	0,5	0	2	
						

Viacnásobné optimá: príklad

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 0.5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Simplexová tabuľka:

	x_1	x_2	x_3	x_4	b	
	1	0,5	0,5	0	2	/2
	0	1,5	-0,5	1	1	
	0	0	0,5	0	2	
						

Viacnásobné optimá: príklad

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 0.5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Simplexová tabuľka:

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	0,5	0,5	0	2
0	1,5	-0,5	1	1
0	0	0,5	0	2

Je toto riešenie optimálne?

Viacnásobné optimá: príklad

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 0.5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Simplexová tabuľka:

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	0,5	0,5	0	2
0	1,5	-0,5	1	1
0	0	0,5	0	2

Je toto riešenie optimálne?

Áno, lebo v poslednom riadku sú všetky indexy nezáporné.

Viacnásobné optimá: príklad

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 0.5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Simplexová tabuľka:

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	0,5	0,5	0	2
0	1,5	-0,5	1	1
0	0	0,5	0	2

Optimálne riešenie:

- nebázické premenné = 0 ($x_2=0$, $x_3=0$)
- bázické premenné = pravá strana ohraničení ($x_1=2$, $x_4=1$)
- účelová funkcia: 2

Iná voľba pivotu

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 0.5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Simplexová tabuľka:

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
	2	1	1	0	4
→	1	2	0	1	3
	-1	-0,5	0	0	0

Iná voľba pivotu

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 0.5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Simplexová tabuľka:

	x_1	x_2	x_3	x_4	b	
	2	1	1	0	4	
→	1	2	0	1	3	-0.5x druhý riadok
	-1	-0,5	0	0	0	

Iná voľba pivotu

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 0.5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Simplexová tabuľka:

	x_1	x_2	x_3	x_4	b	
	1,5	0	1	-0,5	2,5	-0.5x druhý riadok
→	1	2	0	1	3	
	-1	-0,5	0	0	0	

Iná voľba pivotu

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 0.5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Simplexová tabuľka:

	x_1	x_2	x_3	x_4	b	
	1,5	0	1	-0,5	2,5	
→	1	2	0	1	3	
	-1	-0,5	0	0	0	+1/4x druhý riadok

Iná voľba pivotu

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 0.5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Simplexová tabuľka:

	x_1	x_2	x_3	x_4	b	
	1,5	0	1	-0,5	2,5	
→	1	2	0	1	3	
	-0,75	0	0	0,25	0,75	+1/4x druhý riadok

Iná voľba pivotu

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 0.5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Simplexová tabuľka:

	x_1	x_2	x_3	x_4	b	
	1,5	0	1	-0,5	2,5	
→	1	2	0	1	3	/2
	-0,75	0	0	0,25	0,75	

Iná voľba pivotu

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 0.5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Simplexová tabuľka:

	x_1	x_2	x_3	x_4	b	
	1,5	0	1	-0,5	2,5	
→	0,5	1	0	0,5	1,5	/2
	-0,75	0	0	0,25	0,75	

Iná voľba pivotu

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 0.5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Simplexová tabuľka:

	x_1	x_2	x_3	x_4	b	
	1,5	0	1	-0,5	2,5	
→	0,5	1	0	0,5	1,5	
	-0,75	0	0	0,25	0,75	

Je toto riešenie optimálne?

Nie, lebo v poslednom riadku sú záporné indexy.

Iná voľba pivotu

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 0.5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Simplexová tabuľka:

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1,5	0	1	-0,5	2,5
0,5	1	0	0,5	1,5
-0,75	0	0	0,25	0,75

Iná voľba pivotu

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 0.5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Simplexová tabuľka:

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1,5	0	1	-0,5	2,5
0	1	-1/3	2/3	2/3
0	0	1/2	0	2

+1/2x druhý riadok

Iná voľba pivotu

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 0.5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Simplexová tabuľka:

	x_1	x_2	x_3	x_4	b	
→	1	0	$2/3$	$-1/3$	$5/3$	/1.5
	0	1	$-1/3$	$2/3$	$2/3$	
	0	0	$1/2$	0	2	

Iná voľba pivotu

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 0.5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Simplexová tabuľka:

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	0	$2/3$	$-1/3$	$5/3$
0	1	$-1/3$	$2/3$	$2/3$
0	0	$1/2$	0	2

Je toto riešenie optimálne?

Áno, lebo v poslednom riadku sú všetky indexy nezáporné.

Iná voľba pivotu

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 0.5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Simplexová tabuľka:

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	0	$2/3$	$-1/3$	$5/3$
0	1	$-1/3$	$2/3$	$2/3$
0	0	$1/2$	0	2

Rovnako kvalitné riešenie

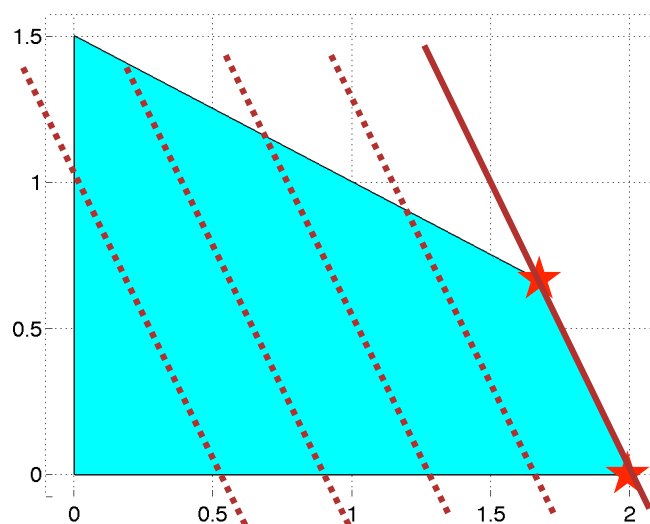
- základné premenné = 0 ($x_3=0, x_4=0$)
- základné premenné = pravá strana ohraničení ($x_1=5/3, x_2=2/3$)
- účelová funkcia: 2

Viacnásobné optimá: príklad

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 0.5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Optimálne riešenia

- $x_1=2, x_2=0$
- $x_1=5/3, x_2=2/3$



Viacnásobné optimá

Vznikajú keď je účelová funkcia paralelná s “optimálnym” aktívnym ohraničením

Všetky optimá majú rovnakú hodnotu účelovej funkcie (tá je jediným kritériom, ktorým sa dá porovnať kvalita dvoch riešení)

Predovšetkým v riadení nie je prepínanie medzi viacnásobnými optimami výhodné (vedie k únave materiálu)

Prekvapenia simplexovej metódy

Vplyv heuristiky

Viacnásobné optimá

Degenerovanosť a cyklenie

Neohraničenosť

Neriešiteľnosť

Vykúpenie

Degenerovanosť: príklad

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ & x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Degenerovanosť: príklad

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ & x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
3	1	1	0	0	6
1	-1	0	1	0	2
0	1	0	0	1	3
-2	-1	0	0	0	0

Zlučiteľné riešenie:

- nebázické premenné = 0 ($x_1=0$, $x_2=0$)
- bázické premenné = pravá strana ohraničení ($x_3=6$, $x_4=2$, $x_5=3$)
- účelová funkcia: 0

Degenerovanosť: príklad

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ & x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$



x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
3	1	1	0	0	6
1	-1	0	1	0	2
0	1	0	0	1	3
-2	-1	0	0	0	0



Degenerovanosť: príklad

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ & x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	4	1	-3	0	0
1	-1	0	1	0	2
0	1	0	0	1	3
0	-3	0	2	0	4

Zlučiteľné riešenie:

- nebázické premenné = 0 ($x_2=0$, $x_4=0$)
- bážické premenné = pravá strana ohraničení ($x_1=2$, $x_3=0$, $x_5=3$)
- účelová funkcia: 4

Degenerované
bázické riešenie

Degenerovanosť: príklad

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ & x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$



x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	4	1	-3	0	0
1	-1	0	1	0	2
0	1	0	0	1	3
0	-3	0	2	0	4



Degenerovanosť: príklad

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ & x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	1	1/4	-3/4	0	0
1	0	1/4	1/4	0	2
0	0	-1/4	3/4	1	3
0	0	3/4	-1/4	0	4

Zlučiteľné riešenie:

- nebázické premenné = 0 ($x_3=0$, $x_4=0$)
- bážické premenné = pravá strana ohraničení ($x_1=2$, $x_2=0$, $x_5=3$)
- účelová funkcia: 4

To
isté riešenie ako v predošlej
tabuľke

Degenerovanosť: príklad

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ & x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	0	1	1/4	-3/4	0	0
	1	0	1/4	1/4	0	2
→	0	0	-1/4	3/4	1	3
	0	0	3/4	-1/4	0	4

Degenerovanosť: príklad

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ & x_2 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	1	0	0	1	3
1	0	1/3	0	-1/3	1
0	0	-1/3	1	4/3	4
0	0	2/3	0	1/3	5

Optimálne riešenie:

- nebázické premenné = 0 ($x_3=0$, $x_5=0$)
- bázické premenné = pravá strana ohraničení ($x_1=1$, $x_2=3$, $x_4=4$)
- účelová funkcia: 5

Degenerovanosť

Degenerované riešenie = niektorá bázická premenná rovná nule

Degenerovanosť môže spôsobiť zacyklenie

Degenerovanosť je častá, cyklenie je veľmi zriedkavé

Zaokrúhľovanie často pomáha odstrániť zacyklenie

Prekvapenia simplexovej metódy

Vplyv heuristiky

Viacnásobné optimá

Degenerovanosť a cyklenie

Neohraničenosť

Neriešiteľnosť

Vykúpenie

Neohraničené optimum: příklad

$$\begin{array}{ll}\max & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} & -x_1 + x_1 \leq 1 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

Neohraničené optimum: příklad

$$\begin{array}{ll}\max & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} & -x_1 + x_1 \leq 1 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	b
	-1	1	1	0	1
→	1	-2	0	1	2
	-2	-1	0	0	0

Neohraničené optimum: príklad

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_1 \leq 1 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

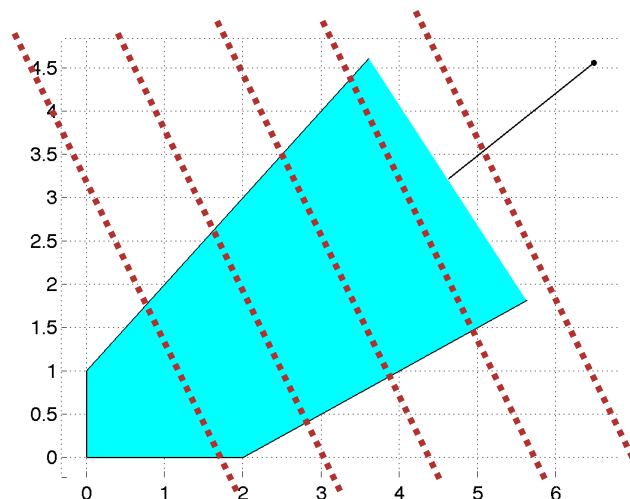
x_1	x_2	x_3	x_4	b
0	-1	1	1	3
1	-2	0	1	2
0	-5	0	2	4

Všetky pomerové koeficienty sú záporné:

- hodnotu x_2 môžeme zvyšovať až do nekonečna a neporušíme ohraničenia
- hodnota účelovej funkcie bude tiež rásť do nekonečna

Neohraničené optimum: príklad

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_1 \leq 1 \\ & x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Neohraničenosť

Vzniká vtedy, keď nemáme ohraničenia v smere vzrastu účelovej funkcie

Rozoznáme ju podľa zápornosti všetkých pomerových koeficientov pri príslušnej pivotovacej premennej

Znamená, že úloha je zle postavená, keďže môžeme dosiahnuť nekonečne veľký zisk

Prekvapenia simplexovej metódy

Vplyv heuristiky

Viacnásobné optimá

Degenerovanosť a cyklenie

Neohraničenosť

Neriešiteľnosť

Vykúpenie

Neriešiteľnosť: príklad

$$\begin{array}{ll}\max & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} & -0.5x_1 - 0.5x_2 \leq -1 \\ & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

Neriešiteľnosť: príklad

$$\begin{array}{ll}\max & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} & -0.5x_1 - 0.5x_2 \leq -1 \\ & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0\end{array}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	b
-0,5	-0,5	1	0	-1
1	1	0	1	1
-1	-1	0	0	0

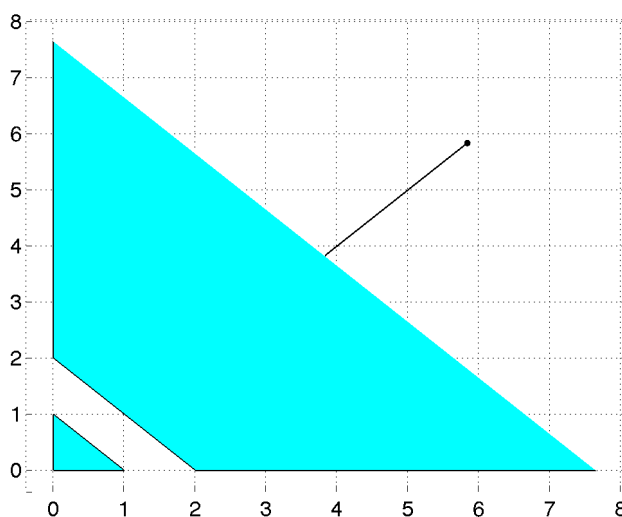
Rozdelenie premenných:

- nebázické = 0 ($x_1=0, x_2=0$)
- bážické = pravá strana ohraničenia ($x_3=-1, x_4=1$)

Lenže všetky
premenné musia byť
nezáporné!

Neriešiteľnosť: príklad

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -0.5x_1 - 0.5x_2 \leq -1 \\ & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Neriešiteľnosť

Vzniká vtedy, keď ohraničenia tvoria prázdnu množinu (neexistuje bod, ktorý by spĺňal súčasne všetky ohraničenia)

Rozoznáme ju podľa zápornosti niektorej bázeickej premennej

Znamená, že úloha je zle postavená, keďže nepripúšťa žiadne riešenie

Vedie k strate funkčnosti riadiaceho systému

Prekvapenia simplexovej metódy

Vplyv heuristiky

Viacnásobné optimá

Degenerovanosť a cyklenie

Neohraničenosť

Neriešiteľnosť

Vykúpenie

linprog

`linprog` je program na riešenie lineárneho programovania

- beží pod Matlabom (súčasť Optimization Toolboxu)
- implementuje 3 metódy (jedna z nich je simplexová)
- ako vstup vyžaduje LP v nasledovnom tvare:

$\min_x c^T x$	minimalizácia lineárnej účelovej funkcie
s.t. $Ax \leq b$	ohraničenia v tvare nerovností
$A_{eq}x = b_{eq}$	ohraničenia v tvare rovností
$x_{lb} \leq x \leq x_{ub}$	hranice na optimalizované premenné

linprog

Tvar LP	Syntax
$\min c^T x$ s.t. $Ax \leq b$	<code>xopt=linprog(c, A, b)</code>
$\max c^T x$ s.t. $Ax \leq b$	<code>xopt=linprog(-c, A, b)</code>
$\min c^T x$ s.t. $Ax \leq b$ $A_{eq}x = b_{eq}$	<code>xopt=linprog(c, A, b, Aeq, beq)</code>
$\min c^T x$ s.t. $Ax \leq b$ $A_{eq}x = b_{eq}$ $x_{lb} \leq x \leq x_{ub}$	<code>xopt=linprog(c, A, b, Aeq, beq, lb, ub)</code>

linprog

`[xopt, Jopt, status] = linprog(c, A, b, Ae, be, lb, ub)`

Výstupné argumenty:

- xopt: optimálne riešenie (vektor)
- Jopt: hodnota účelovej funkcie v optime (skalár)
- status: stav riešenia (skalár)

Status	Význam
1	optimálne riešenie
0	prekročený maximálny počet iterácií
-2	neriešiteľný problém
-3	neohraničený problém

Kvadratické programovanie a jeho aplikácie

Michal Kvasnica

Dnes...

Kvadratické programovanie

- formulácia a riešenie
- quadprog

Rozšírené fitovanie

- ohraničenia
- riedke fity

Kvadratické programovanie

$$\begin{aligned} \min_x \quad & 1/2 x^T P x + q^T x + r \\ \text{s.t.} \quad & A x \leq b \\ & A_e x = b_e \end{aligned}$$

Základné predpoklady:

- matica P je **symetrická**, teda $P = P^T$
- matica P je **kladne definitná**

Ak $P=0$, problém sa redukuje na lineárne programovanie

Kvadratický program bez ohraničení

$$\min_x \quad 1/2 x^T P x + q^T x + r$$

- 1 $\nabla J(x^*) = 0$
- 2 $\nabla J = P x + q$
- 3 $x^* = -P^{-1} q$

Kvadratický program s rovnostami

$$\begin{aligned} \min_x \quad & 1/2 x^T P x + q^T x + r \\ \text{s.t.} \quad & A_e x = b_e \end{aligned}$$

1 $\mathcal{L}(x, \mu) = 1/2 x^T P x + q^T x + r + \mu^T (A_e x - b_e)$

2 $\nabla \mathcal{L}(x, \mu) = \begin{bmatrix} P x + q + A^T \mu \\ A x - b \end{bmatrix}$

3 $\begin{aligned} P x^* + q + A^T \mu^* &= 0 \\ A x^* &= b \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} P & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ \mu^* \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -q \\ b \end{bmatrix}$

Karush-Kuhn-Tuckerov systém

Kvadratický program s nerovnostami

$$\begin{aligned} \min_x \quad & 1/2 x^T P x + q^T x + r \\ \text{s.t.} \quad & A x \leq b \end{aligned}$$

Lagrangian: $\mathcal{L}(x, \lambda) = 1/2 x^T P x + q^T x + r + \lambda^T (A x - b)$

KKT podmienky:

stacionarita	$P x^* + q + A^T \lambda^* = 0$
primárna zlučiteľnosť	$A x^* \leq b$
duálna zlučiteľnosť	$\lambda^* \geq 0$
doplnková voľnosť	$\lambda^* (A x^* - b) = 0$

quadprog

quadprog je program na riešenie kvadratického programovania

- beží pod Matlabom (súčasť Optimization Toolboxu)
- implementuje 3 metódy (jedna z nich preskúmava aktívne ohraničenia)
- ako vstup vyžaduje QP v štandardnom tvare:

$$\begin{array}{ll} \min_x \frac{1}{2}x^T Px + q^T x & \text{minimalizácia kvadratickej účelovej funkcie} \\ \text{s.t. } Ax \leq b & \text{ohraničenia v tvare nerovností} \\ A_e x = b_e & \text{ohraničenia v tvare rovností} \\ x_{lb} \leq x \leq x_{ub} & \text{hranice na optimalizované premenné} \end{array}$$

quadprog

`[xopt, Jopt, status] = quadprog(P, q, A, b, Ae, be, lb, ub)`

Výstupné argumenty:

- xopt: optimálne riešenie (vektor)
- Jopt: hodnota účelovej funkcie v optime (skalár)
- status: stav riešenia (skalár)

Status	Význam
1	optimálne riešenie
0	prekročený maximálny počet iterácií
-2	neriešiteľný problém
-3	neohraničený problém

Dnes...

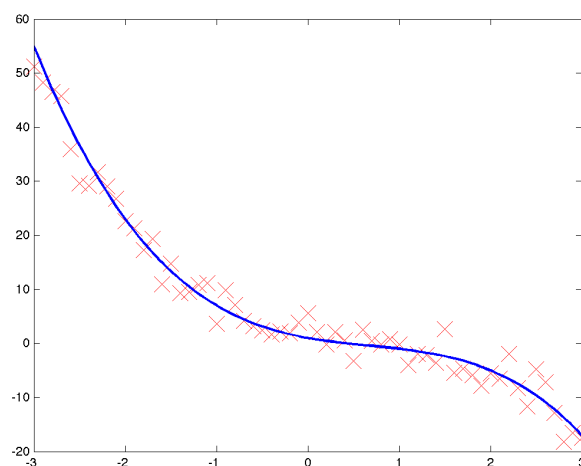
Kvadratické programovanie

- formulácia a riešenie
- quadprog

Rozšírené fitovanie

- ohraničenia
- riedke fity

Fitovanie dát ako kvadratický program



$$\begin{aligned} \min \quad & \sum (\hat{y}_i - y_i)^2 \\ \text{s.t.} \quad & \hat{y}_i = a_3 x_i^3 + a_2 x_i^2 + a_1 x_i + a_0 \end{aligned}$$

Fitovanie dát ako kvadratický program

$$\min (\hat{y}_1 - y_1)^2 + (\hat{y}_2 - y_2)^2 + (\hat{y}_3 - y_3)^2 + (\hat{y}_4 - y_4)^2 + (\hat{y}_5 - y_5)^2$$

$$\text{s.t. } \hat{y}_1 = a_3 x_1^3 + a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0$$

$$\hat{y}_2 = a_3 x_2^3 + a_2 x_2^2 + a_1 x_2 + a_0$$

$$\hat{y}_3 = a_3 x_3^3 + a_2 x_3^2 + a_1 x_3 + a_0$$

$$\hat{y}_4 = a_3 x_4^3 + a_2 x_4^2 + a_1 x_4 + a_0$$

$$\hat{y}_5 = a_3 x_5^3 + a_2 x_5^2 + a_1 x_5 + a_0$$

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \hat{y}_3 \\ \hat{y}_4 \\ \hat{y}_5 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \min (Ma - y)^T (Ma - y)$$

Fitovanie dát ako kvadratický program

$$\min_a (Ma - y)^T (Ma - y)$$

$\Downarrow$

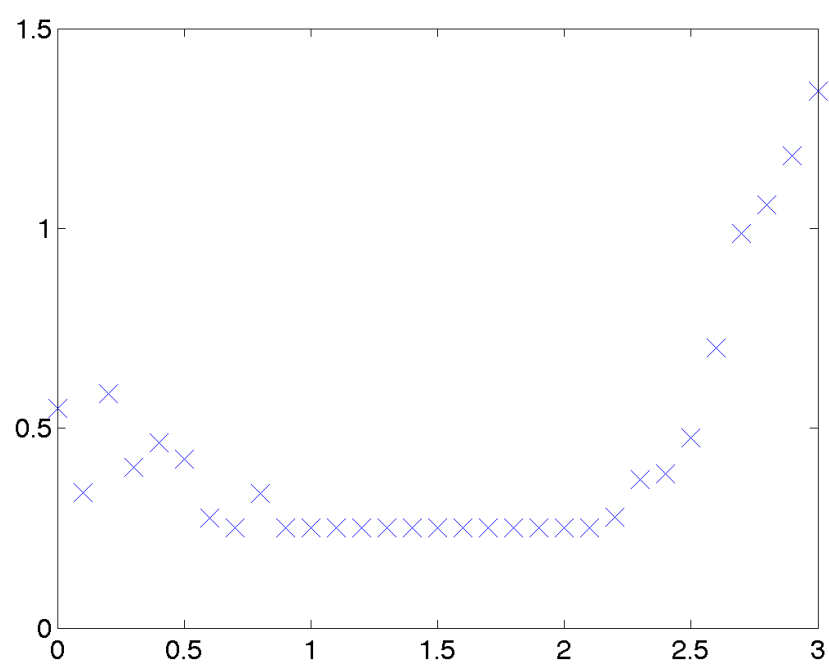
$$\min_x \frac{1}{2} x^T P x + q^T x + r$$

Transformácia:

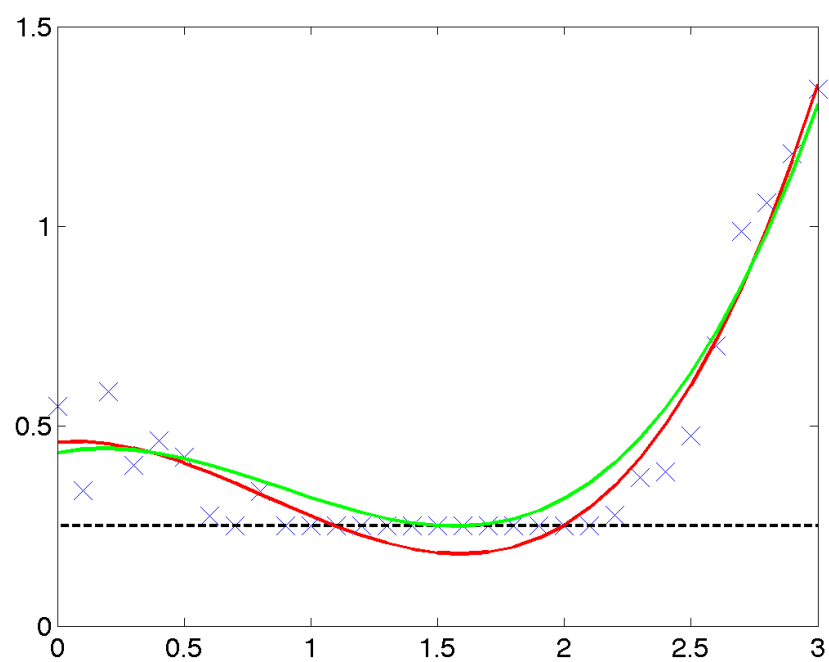
- $x = a$
- $P = 2M^T M$
- $q = -2M^T y$
- $r = y^T y$

$$\text{xopt} = \text{quadprog}(2 * M' * M, -2 * M' * y)$$

Fitovanie s ohraničeniami



Fitovanie s ohraničeniami



Fitovanie s ohraničeniami

$$\min_a (Ma - y)^T (Ma - y)$$

$\Downarrow$

$$\min_x \frac{1}{2} x^T P x + q^T x + r$$

$$\text{s.t. } Ax \leq b$$

$$A_e x = b_e$$

Ohraničenie na hodnotu fitu:

- $z = Mx$
- $Z \geq Z_{min}$
- $Mx \geq z_{min}$ a teda $A=-M$, $b=-Z_{min}$

Dnes...

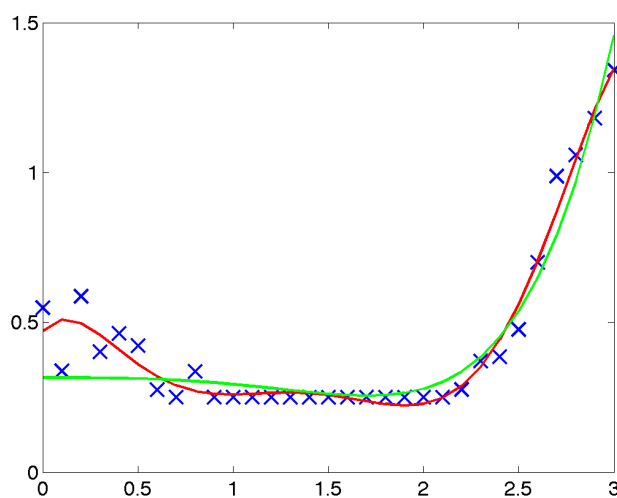
Kvadratické programovanie

- formulácia a riešenie
- quadprog

Rozšírené fitovanie

- ohraničenia
- riedke fity

Riedke fity



$$f(x) = -0.14x^6 + 1.23x^5 - 4.06x^4 + 6.15x^3 - 4.15x^2 + 0.75x + 0.47$$

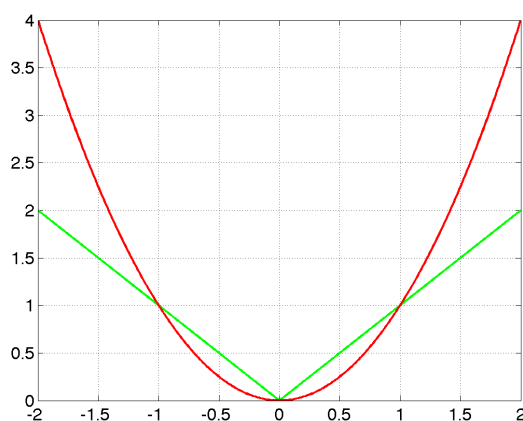
$$f(x) = 0.003x^6 - 0.02x^3 + 0.32$$

Riedke fity

$$\min_a (Ma - y)^T (Ma - y) + \gamma \|a\|_1$$

$$\|a\|_1 = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

Minimalizácia 1-normy vedie na riedke riešenie s malým počtom nenulových prvkov

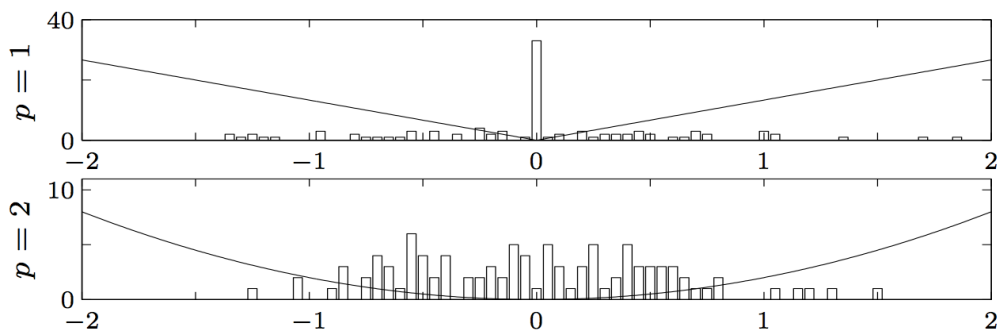


Riedke fity

$$\min_a (Ma - y)^T (Ma - y) + \gamma \|a\|_1$$

$$\|a\|_1 = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

Minimalizácia 1-normy vedie na riedke riešenie s malým počtom nenulových prvkov



Riedke fity

$$\min_a (Ma - y)^T (Ma - y) + \gamma \|a\|_1$$

Ako naformulovať kvadratický program?

$$\min_x \frac{1}{2} x^T P x + q^T x + r$$

$$\text{s.t. } Ax \leq b$$

$$A_e x = b_e$$

Minimalizácia absolútnej hodnoty:

$$\begin{aligned} \min |x| &\Leftrightarrow \min \max\{x, -x\} \Leftrightarrow \min \epsilon && \Leftrightarrow \min \epsilon \\ &\text{s.t. } \epsilon \geq \max\{x, -x\} && \text{s.t. } \epsilon \geq x \\ & && \epsilon \geq -x \end{aligned}$$

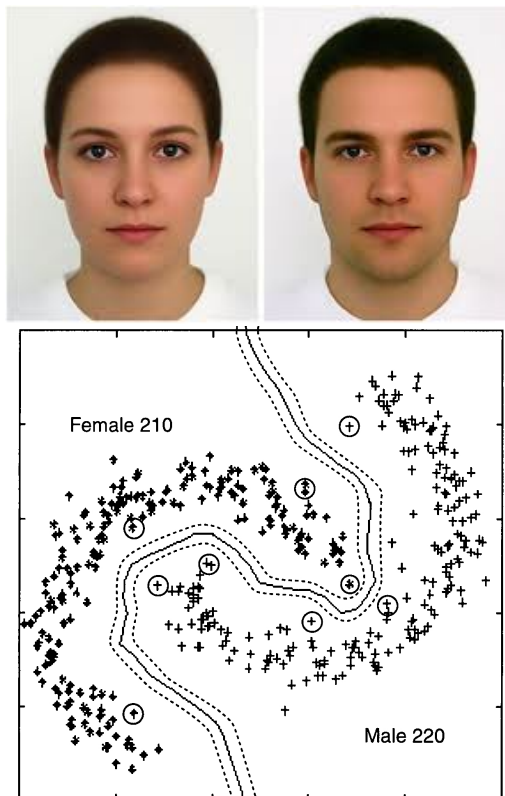
Minimalizácia 1-normy:

$$\begin{aligned} \min \|x\|_1 &\Leftrightarrow \min \mathbf{1}^T \epsilon \\ &\text{s.t. } -\epsilon \leq x \leq \epsilon \end{aligned}$$

Separácia a klasifikácia

Michal Kvasnica

Určenie pohlavia z fotky

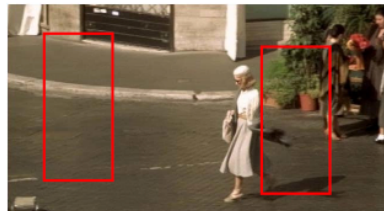


Aplikácie klasifikácie

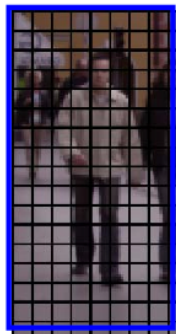
Detekcia objektov na obrázkoch



Pozitívna vzorka



Negatívna vzorka



Rastrovanie

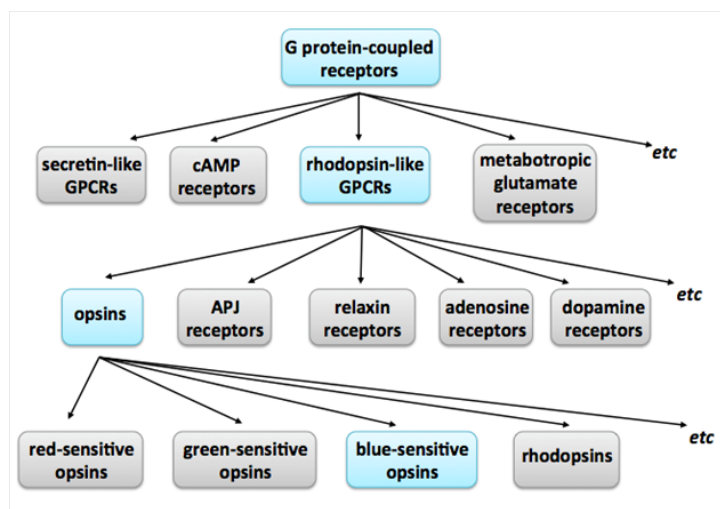


Detekcia vlastností

Aplikácie klasifikácie

Detekcia objektov na obrázkoch

Klasifikácia proteínov

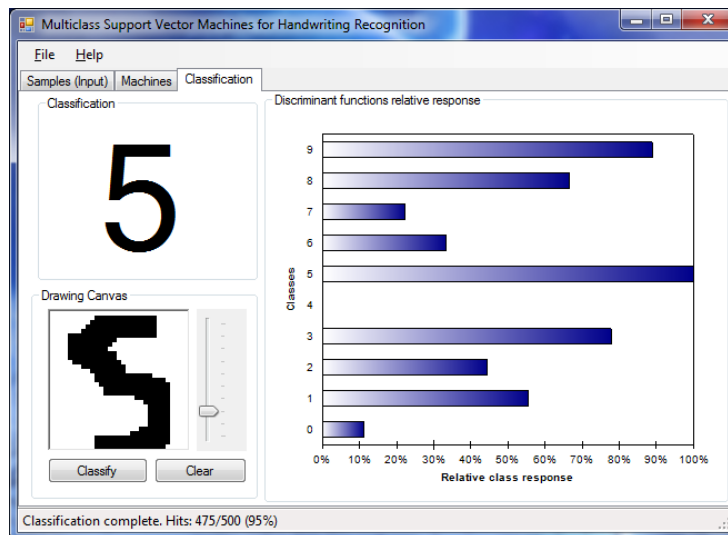


Aplikácie klasifikácie

Detekcia objektov na obrázkoch

Klasifikácia proteínov

Rozoznávanie písma



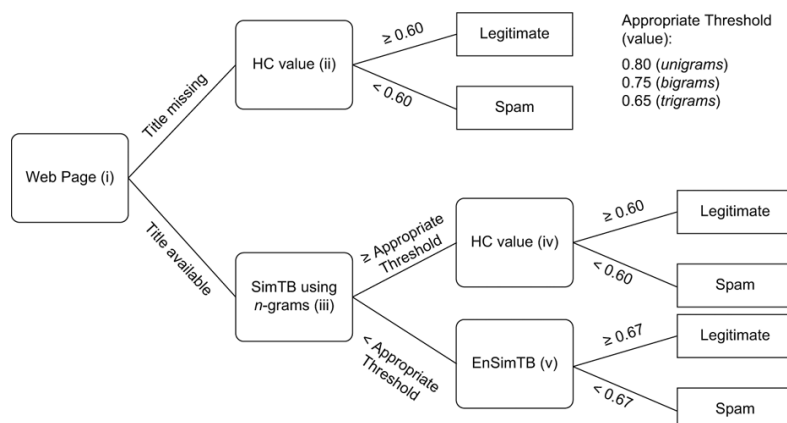
Aplikácie klasifikácie

Detekcia objektov na obrázkoch

Klasifikácia proteínov

Rozoznávanie písma

Kategorizácia textu (napr. detekcia spamov)



Dnes...

Lineárna separácia

Robustná separácia

Približná separácia

Support Vector Machines (SVM)

Nelineárna separácia

Lineárna separácia

Dané sú dve množiny bodov $\{x_1, \dots, x_N\}$ a $\{y_1, \dots, y_M\}$

Cieľom je nájsť parametre $a \in \mathbf{R}^n$ a $b \in \mathbf{R}$ také, že:

- $a^T x_i + b > 0, i = 1, \dots, N$
- $a^T y_j + b < 0, j = 1, \dots, M$

Reformulácia na neostré nerovnosti:

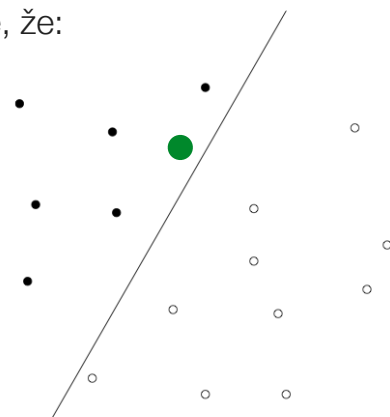
- $a^T x_i + b \geq \varepsilon, i = 1, \dots, N$
- $a^T y_j + b \leq -\varepsilon, j = 1, \dots, M$

Po vydelení epsilonom:

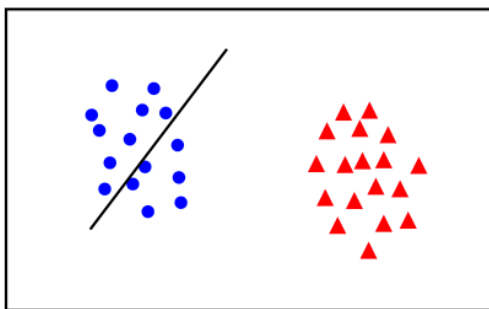
- $a^T x_i + b \geq 1, i = 1, \dots, N$
- $a^T y_j + b \leq -1, j = 1, \dots, M$

Reformulácia na LP po zavedení novej premennej $z = [a^T, b]^T$:

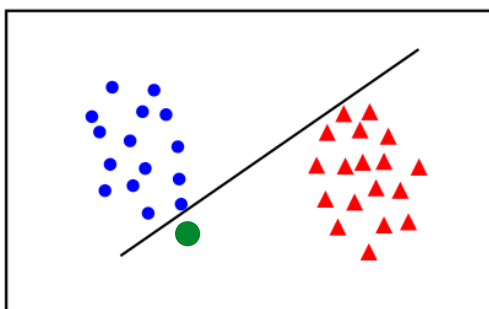
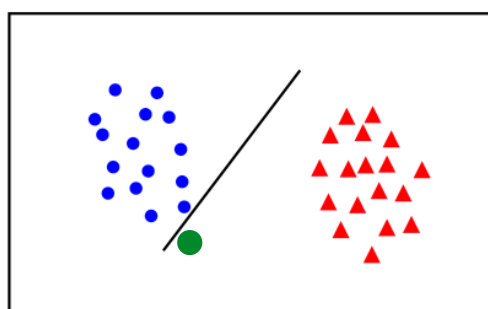
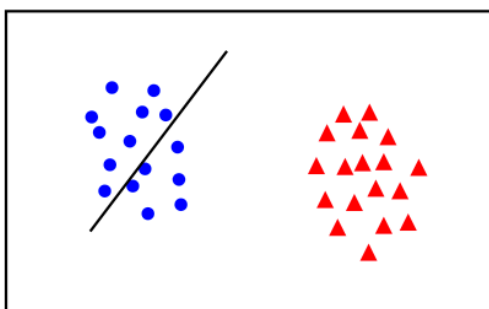
$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{0}^T z \\ \text{s.t.} \quad & -[x_i^T, 1]z \leq -1, \quad i = 1, \dots, N \\ & [y_j^T, 1]z \leq -1, \quad j = 1, \dots, M \end{aligned}$$



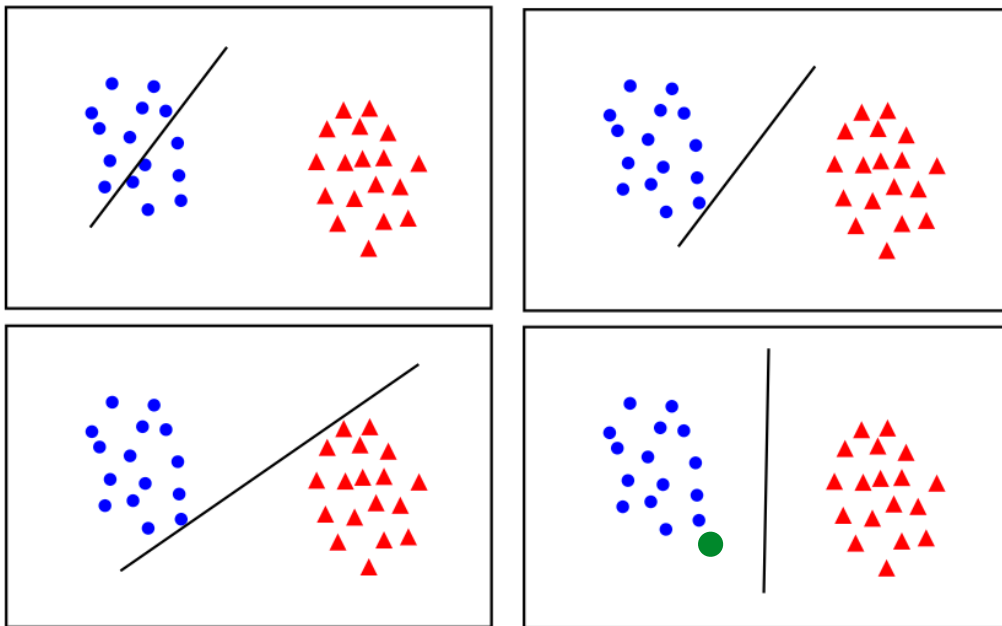
Robustná separácia



Robustná separácia



Robustná separácia



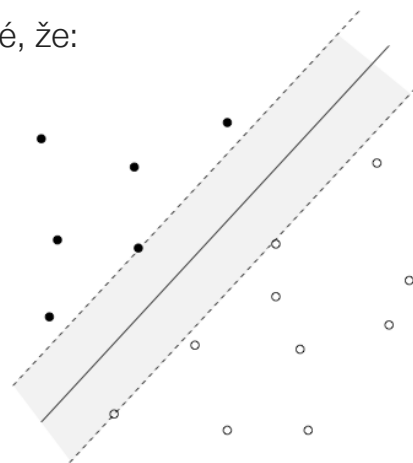
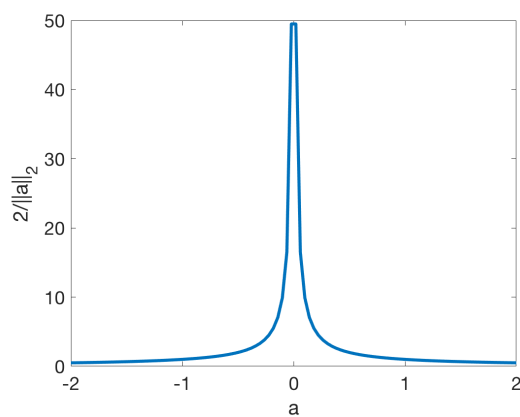
Robustná separácia

Dané sú dve množiny bodov $\{x_1, \dots, x_N\}$ a $\{y_1, \dots, y_M\}$

Cieľom je nájsť parametre $a \in \mathbb{R}^n$ a $b \in \mathbb{R}$ také, že:

- $a^T x_i + b > 0, i = 1, \dots, N$
- $a^T y_j + b < 0, j = 1, \dots, M$
- je maximalizovaná vzdialenosť od bodov

Vzdialenosť roviny od bodov je $2/\|a\|_2$



Robustná separácia

Dané sú dve množiny bodov $\{x_1, \dots, x_N\}$ a $\{y_1, \dots, y_M\}$

Cieľom je nájsť parametre $a \in \mathbb{R}^n$ a $b \in \mathbb{R}$ také, že:

- $a^T x_i + b > 0, i = 1, \dots, N$
- $a^T y_j + b < 0, j = 1, \dots, M$
- je maximalizovaná vzdialenosť od bodov

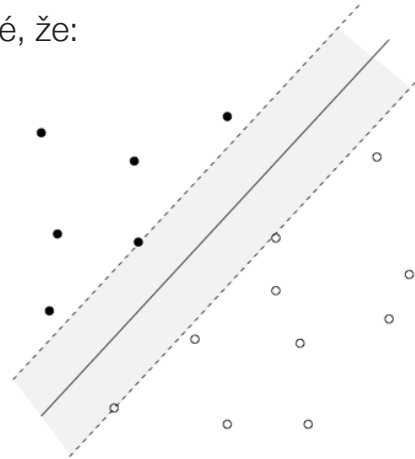
Vzdialenosť roviny od bodov je $2/\|a\|_2$

Teda minimalizujeme prevrátenú hodnotu:

$$\begin{aligned} \min \quad & 1/2 \|a\|_2 \\ \text{s.t.} \quad & a^T x_i + b \geq 1, \quad i = 1, \dots, N \\ & a^T y_j + b \leq -1, \quad j = 1, \dots, M \end{aligned}$$

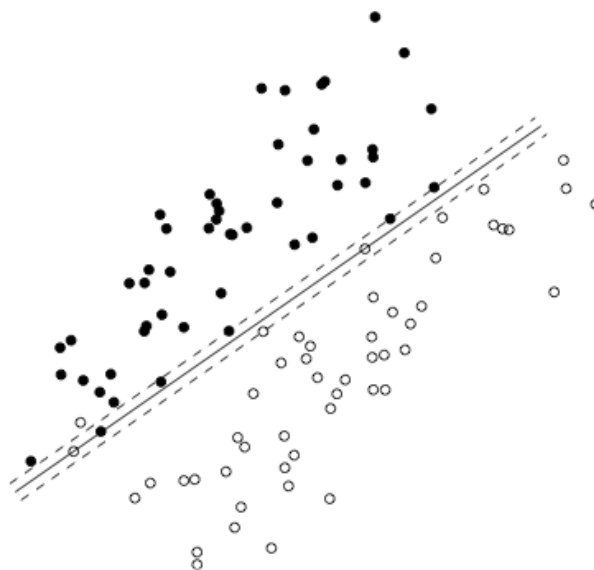
Reformulácia na kvadratický program cez umocnenie účelovky:

$$\begin{aligned} \min \quad & 1/4 a^T a \\ \text{s.t.} \quad & a^T x_i + b \geq 1, \quad i = 1, \dots, N \\ & a^T y_j + b \leq -1, \quad j = 1, \dots, M \end{aligned}$$



Približná separácia

Hľadáme taký separátor, ktorý minimalizuje počet chybné klasifikovaných bodov



Približná separácia

Hľadáme taký separátor, ktorý minimalizuje počet chybné klasifikovaných bodov

Pôvodné ohraničenia boli **tvrdé**:

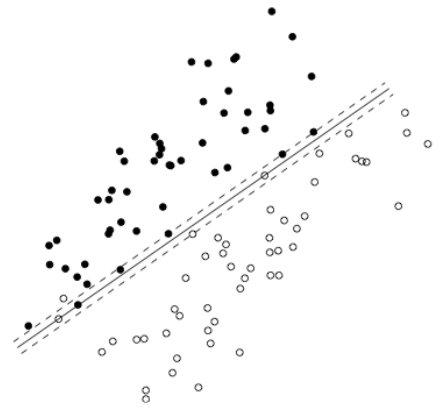
- $a^T x_i + b \geq 1, i = 1, \dots, N$
- $a^T y_j + b \leq -1, j = 1, \dots, M$

Zmäkčíme ich:

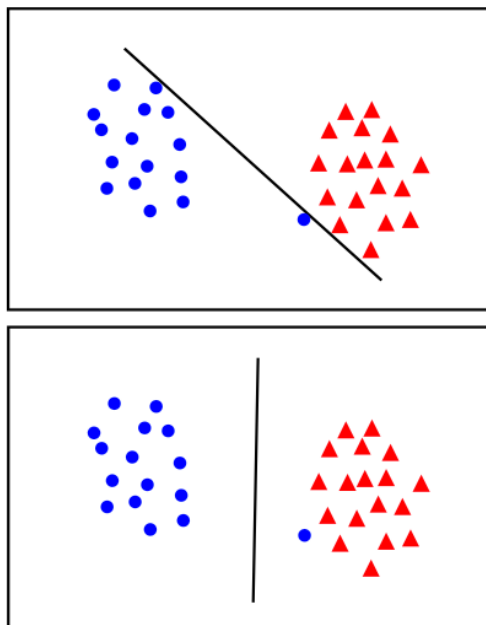
- $a^T x_i + b \geq 1 - u_i, i = 1, \dots, N$
- $a^T y_j + b \leq -1 + v_j, j = 1, \dots, M$
- $u_i, v_j \geq 0$

A budeme penalizovať použitie zmäkčovacích premenných:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_i u_i + \sum v_j \\ \text{s.t.} \quad & a^T x_i + b \geq 1 - u_i, \quad i = 1, \dots, N \\ & a^T y_j + b \leq -1 + v_j, \quad j = 1, \dots, M \\ & u \geq 0, v \geq 0 \end{aligned}$$



Support Vector Machines



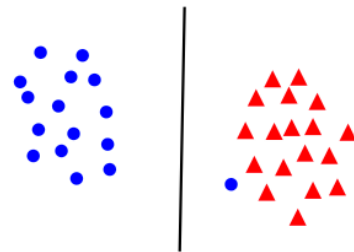
Support Vector Machines

Hľadáme separátor, ktorý má široku separačnú medzeru a zároveň malý počet zle klasifikovaných bodov

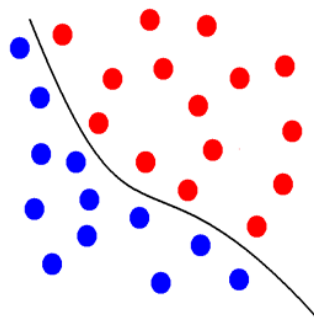
$$\begin{aligned} \min \quad & \|a\|_2 + \gamma(\mathbf{1}^T u + \mathbf{1}^T v) \\ \text{s.t.} \quad & a^T x_i + b \geq 1 - u_i, \quad i = 1, \dots, N \\ & a^T y_j + b \leq -1 + v_j, \quad j = 1, \dots, M \\ & u \geq 0, v \geq 0 \end{aligned}$$

Parameter γ určuje pomer medzi šírkou medzery a počtom zle klasifikovaných bodov

Ide o **multikritériálnu** optimalizáciu



Nelineárna separácia



Nelineárna separácia



Nelineárna separácia

Hľadáme také parametre funkcie $f(z)$, že platí:

$$\begin{aligned} f(x_i) &> 0, \quad i = 1, \dots, N \\ f(y_j) &< 0, \quad j = 1, \dots, M \end{aligned}$$

Vo všeobecnosti je to veľmi ťažký problém

Ak $f(z) = \sum \alpha_k f_k(z)$, potom ide o lineárne programovanie

Príklad: kvadratická separácia

$$\begin{aligned} f(z) &= z^T P z + q^T z + r \\ x_i^T P x_i + q^T x_i + r &\geq 1, \quad i = 1, \dots, N \\ y_j^T P y_j + q^T y_j + r &\leq -1, \quad j = 1, \dots, M \end{aligned}$$

Najčastejšie sa používajú polynomicke bázičné funkcie $f_k(z)$

0.1 Základné pojmy a definície

Definícia 0.1 (Označovanie skalárov, vektorov a matic). Zápis $x \in \mathbb{R}$ znamená, že premenná x je skalár a môže nadobúdať všetky reálne hodnoty od $-\infty$ po ∞ . Zápis $x \in \mathbb{R}^n$ označuje vektorovú premennú v tvare

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad (1)$$

pričom $x_i \in \mathbb{R}$ a x_i je i -tým prvkom vektora. Všetky vektory sú teda z definície stĺpcovými vektormi. Zápis $x \in \mathbb{R}^{n \times m}$ označuje maticu s n riadkami a m stĺpcami, teda

$$x = \begin{bmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & \cdots & x_{n,m} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

pričom $x_{i,j} \in \mathbb{R}$ a $x_{i,j}$ označuje prvok matice nachádzajúci sa na i -tom riadku a j -tom stĺpci. $\square$

Definícia 0.2 (Transponovanie vektora a matice). Pre vektor $x \in \mathbb{R}^n$ zápis $x^\top$ označuje transpozíciu vektora, teda

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}^\top = [x_1 \quad \cdots \quad x_n]. \quad (3)$$

Transpozíciou stĺpcového vektora teda dostaneme riadkový vektor a transpozíciou riadkového vektora je stĺpcový vektor.

Transpozíciou matice $x \in \mathbb{R}^{n \times m}$ je matica $x^\top \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ktorej riadky sú tvorené transponovanými stĺpcami pôvodnej matice. Teda platí

$$\begin{bmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & \cdots & x_{n,m} \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1,m} & \cdots & x_{n,m} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

$\square$

Definícia 0.3 (Operácie s vektormi). Násobenie skalára $\alpha \in \mathbb{R}$ a vektora $x \in \mathbb{R}^n$ je definované ako

$$\alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Pre dva rovnako dlhé vektory $x \in \mathbb{R}^n$ a $y \in \mathbb{R}^n$ platí, že $x \leq y$ vtedy a len vtedy, keď $x_i \leq y_i$ pre všetky i od 1 po n , teda keď porovnanie platí po prvkoch. Rovnako po prvkoch sa realizujú porovnania $x \geq y$, $x < y$ a $x > y$. Ak majú porovnávané vektory rozdielnu dĺžku, nie je možné ich porovnať.

Zápis $x + y$ vedie na

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}, \quad (6)$$

pričom analogicky je definovaný aj rozdiel $x - y$.

Násobenie vektorov, teda zápis xy , nie je povolené ak $n > 1$, keďže pri násobení vektorov/matic musí platiť, že stĺpcový rozmer vektora x (čo je v našom prípade 1 keďže x je stĺpcový vektor) musí byť rovný riadkovému rozmeru y (čo je n). Matematika pozná špeciálny typ súčinu dvoch vektorov, ktorý sa volá *skalárny súčin*. Ten je definovaný ako $x \cdot y$ s použitím špeciálneho operátora “ $\cdot$ ” nasledovne:

$$x \cdot y = x^T y, \quad (7)$$

čo znamená

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \quad (8)$$

Špeciálnym prípadom je $x \cdot x = x^T x = \sum_{i=1}^n x_i^2$. □

Definícia 0.4 (Operácie s maticami). Majme maticu $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$ a maticu $Y \in \mathbb{R}^{p \times q}$. Potom platí, že sčítovanie $X + Y$ je definované iba vtedy, keď majú matice identické rozmery, teda platí $p = n$ a $q = m$. V tomto prípade je suma $X + Y$ definovaná ako matica ktorej prvky sú súčtom prvkov jednotlivých matic. Teda

$$\begin{bmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & \cdots & x_{n,m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_{1,1} & \cdots & y_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n,1} & \cdots & y_{n,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,1} + y_{1,1} & \cdots & x_{1,m} + y_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} + y_{n,1} & \cdots & x_{n,m} + y_{n,m} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

0.1 Základné pojmy a definície

Rozdiel $X - Y$ je definovaný analogicky po prvkoch za predpokladu, že matice majú rovnaký riadkový aj stĺpcový rozmer.

Násobenie matíc $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$ a $Y \in \mathbb{R}^{p \times q}$ v tvare $X \cdot Y$ je možné iba vtedy, ak je stĺpcový rozmer matice X totožný s riadkovým rozmerom matice Y , teda ak platí $p = m$. Výsledkom násobenia je matica, ktorá má n riadkov a q stĺpcov.

Delenie matíc sa realizuje pomocou násobenia inverznou maticou buď zľava alebo zprava. Zápisom $X^{-1}Y$ rozumieme násobenie inverznou maticou k matici X zľava, zatiaľ čo YX^{-1} označuje násobenie zprava. Pritom platí, že k matici $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existuje inverzia $X^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ iba vtedy, ak je matica štvorcová a nesingulárna (teda jej determinant je rôzny od nuly). $\square$

Definícia 0.5 (Norma vektora). Uvažujme vektor $x \in \mathbb{R}^n$, teda $x = [x_1, \dots, x_n]^\top$. Potom

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p} \quad (10)$$

označuje p -normu vektora x kde $|x_i|$ je absolútna hodnota i -tého prvku vektora. Najbežnejšie používanými hodnotami p sú $p = 1$, $p = 2$ a $p = \infty$, ktoré majú nasledovný význam:

- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ je *1-norma* vektora x daná ako súčet absolútnych hodnôt jednotlivých prvkov vektora;
- $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ je *2-normou* (niekedy tiež označovanou ako *Euklidovská norma*) vektora x ;
- $\|x\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i|$ je *nekonečno norma* vektora x daná ako absolútna hodnota toho prvku vektora x , ktorého absolútna hodnota je najväčšia.

$\square$

Definícia 0.6 (Vlastné čísla matice). Uvažujme štvorcovú maticu $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Vlastnými číslami tejto matice sú všetky korene rovnice

$$\det(\lambda I_{n \times n} - M) = 0, \quad (11)$$

kde $I_{n \times n}$ označuje jednotkovú maticu príslušného rozmeru a λ je skalárna symbolická premenná. $\square$

Definícia 0.7 (Zápis funkcií). Zápisom $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ rozumieme takú funkciu $f(x)$, ktorej argumentom (vstupom) je n -rozmerový vektor a výstupom m -rozmerový vektor reálnych čísel. Hovoríme, že $f(x)$ je funkciou n premenných. Zápis $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ označuje funkciu, ktorej vstupom je vektor a výstupom je skalár. Takéto funkcie voláme *skalárne funkcie*. $\square$

Definícia 0.8 (Lokálne minimum). Funkcia $f(x)$ má v bode x^* *lokálne minimum* ak existuje $\delta > 0$ také, že pre každé x spĺňajúce $\|x - x^*\|_2 \leq \delta$ platí, že $f(x^*) \leq f(x)$. $\square$

Geometrická interpretácia podmienky $\|x - x^*\|_2 \leq \delta$ je taká, že uvažujeme také body x , ktoré ležia v kružnici so stredom v x^* a polomerom δ .

Definícia 0.9 (Ostré lokálne minimum). Funkcia $f(x)$ má v bode x^* *ostré lokálne minimum* ak existuje $\delta > 0$ také, že pre každé x spĺňajúce $\|x - x^*\|_2 \leq \delta$ platí, že $f(x^*) < f(x)$. $\square$

Definícia 0.10 (Lokálne maximum). Funkcia $f(x)$ má v bode x^* *lokálne maximum* ak existuje $\delta > 0$ také, že pre každé x spĺňajúce $\|x - x^*\|_2 \leq \delta$ platí, že $f(x^*) \geq f(x)$. $\square$

Definícia 0.11 (Ostré lokálne maximum). Funkcia $f(x)$ má v bode x^* *ostré lokálne maximum* ak existuje $\delta > 0$ také, že pre každé x spĺňajúce $\|x - x^*\|_2 \leq \delta$ platí, že $f(x^*) > f(x)$. $\square$

Definícia 0.12 (Globálne minimum). Funkcia $f(x)$ má v bode x^* *globálne minimum* ak pre všetky body x z definičného oboru funkcie $f(x)$ platí, že $f(x^*) \leq f(x)$. $\square$

Definícia 0.13 (Globálne maximum). Funkcia $f(x)$ má v bode x^* *globálne maximum* ak pre všetky body x z definičného oboru funkcie $f(x)$ platí, že $f(x^*) \geq f(x)$. $\square$

Definícia 0.14 (Kladne semidefinitná matica). Štvorcovú maticu $M \in$

0.1 Základné pojmy a definície

$\mathbb{R}^{n \times n}$ voláme *kladne semidefinitnou* vtedy a len vtedy keď všetky jej vlastné čísla λ_i , $i = 1, \dots, n$, sú nezáporné, teda

$$\lambda_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (12)$$

Kladne semidefinitné matice označujeme pomocou zápisu $M \succeq 0$. $\square$

Definícia 0.15 (Kladne definitná matica). Štvorcovú maticu $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ voláme *kladne definitnou* vtedy a len vtedy keď všetky jej vlastné čísla sú kladné. Kladne definitné matice označujeme pomocou zápisu $M \succ 0$. $\square$

Definícia 0.16 (Záporne semidefinitná matica). Štvorcovú maticu $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ voláme *záporne semidefinitnou* vtedy a len vtedy keď všetky jej vlastné čísla sú nepozitívne, teda

$$\lambda_i \leq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (13)$$

Záporne definitné matice označujeme pomocou zápisu $M \preceq 0$. $\square$

Definícia 0.17 (Záporne definitná matica). Štvorcovú maticu $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ voláme *záporne definitnou* vtedy a len vtedy keď všetky jej vlastné čísla sú záporné. Záporne definitné matice označujeme pomocou zápisu $M \prec 0$. $\square$

Definícia 0.18 (Indefinitná matica). Štvorcovú maticu $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ voláme *indefinitnou* vtedy a len vtedy keď nie je ani kladne ani záporne semidefinitná, teda niektoré jej vlastné čísla sú kladné a niektoré záporné. $\square$

Definícia 0.19 (Gradient). Uvažujme funkciu $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Potom $\nabla f(x)$ kde $x = [x_1, \dots, x_n]^\top$ označuje *gradient* tejto funkcie ako vektor parciálnych derivácií funkcie $f(x)$ podľa premenných x_1 až x_n , teda:

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

$\square$

Poznámka 0.20. Ak je funkcia $f(x)$ funkciou jednej premennej, teda keď $x \in \mathbb{R}$, potom je jej gradient rovný prvej derivácii $f(x)$ podľa x . $\square$

Definícia 0.21 (Hessián). Uvažujme funkciu $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Potom $\nabla^2 f(x)$ kde $x = [x_1, \dots, x_n]^\top$ označuje *Hessián* tejto funkcie ako maticu parciálnych druhých derivácií $f(x)$ podľa premenných x_1 až x_n , teda:

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f(x)}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Hessián sa tiež niekedy nazýva *Hessova matica*. $\square$

Poznámka 0.22. Ak je funkcia $f(x)$ funkciou jednej premennej, teda keď $x \in \mathbb{R}$, potom je jej Hessián rovný druhej derivácii $f(x)$ podľa x . $\square$

Definícia 0.23 (Stacionárny bod funkcie). Bod $\tilde{x}$ je *stacionárnym bodom* funkcie $f(x)$ ak platí $\nabla f(\tilde{x}) = 0$, teda že gradient funkcie je v tomto bode nulovým vektorom. Geometrická interpretácia je, že funkcia v stacionárnom bode ani nerastie, ani neklesá. $\square$

Definícia 0.24 (Konvexná funkcia). Uvažujme funkciu $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Táto funkcia je *konvexná* na celom jej definičnom obore vtedy a len vtedy ak platí aspoň jedna z týchto podmienok:

1. Pre ľubovoľné dva body y a z z definičného oboru funkcie a pre všetky hodnoty θ z intervalu 0 až 1 platí, že

$$f(\theta y + (1 - \theta)z) \leq \theta f(y) + (1 - \theta)f(z). \quad (16)$$

2. Pre ľubovoľné dva body y a z z definičného oboru funkcie platí, že

$$f(z) \geq f(y) + \nabla f(y)^\top (z - y), \quad (17)$$

kde $\nabla f(x)$ je gradient funkcie.

3. Hessián funkcie $f(x)$ je kladne semidefinitný, teda platí

$$\nabla^2 f(x) \succeq 0. \quad (18)$$

0.1 Základné pojmy a definície

□

Poznámka 0.25. Geometrická interpretácia podmienky konvexnosti v (16) je nasledovná. Pre ľubovoľné dva body y a z musí platiť, že graf funkcie $f(x)$ na intervale $y \leq x \leq z$ leží na alebo pod úsečkou, ktorá spája funkčné hodnoty $f(y)$ a $f(z)$. Podmienka (17) vyjadruje situáciu, keď graf funkcie leží na alebo nad dotyčnicou tejto funkcie v ľubovoľnom bode jej definičného oboru. □

Poznámka 0.26. Overenie konvexnosti podľa podmienky (17) vyžaduje, aby existoval gradient danej funkcie, teda aby bola funkcia $f(x)$ spojite diferencovateľná. Podmienka (18) navyše vyžaduje, aby existovala aj druhá derivácia a táto bola tiež spojitá. □

Definícia 0.27 (Konkávna funkcia). Funkcia $f(x)$ je *konkávna* na celom jej definičnom obore vtedy a len vtedy ak platí aspoň jedna z týchto podmienok:

1. Funkcia $-f(x)$ je konvexná.
2. Pre ľubovoľné dva body y a z z definičného oboru funkcie a pre všetky hodnoty θ z intervalu 0 až 1 platí, že

$$f(\theta y + (1 - \theta)z) \geq \theta f(y) + (1 - \theta)f(z). \quad (19)$$

3. Pre ľubovoľné dva body y a z z definičného oboru funkcie platí, že

$$f(z) \leq f(y) + \nabla f(y)^\top (z - y). \quad (20)$$

4. Hessián funkcie $f(x)$ je záporne semidefinitný, teda $\nabla^2 f(x) \preceq 0$.

□

Definícia 0.28 (Striktne konvexná funkcia). Funkcia $f(x)$ je *striktne konvexná* ak platí aspoň jedna z nasledovných podmienok:

1. Pre ľubovoľné dva body y a z z definičného oboru funkcie spĺňajúce $y \neq z$ a pre všetky hodnoty θ z intervalu 0 až 1 platí, že

$$f(\theta y + (1 - \theta)z) < \theta f(y) + (1 - \theta)f(z). \quad (21)$$

-
2. Pre ľubovoľné dva body y a z z definičného oboru funkcie spĺňajúce $y \neq z$ platí, že

$$f(z) > f(y) + \nabla f(y)^\top (z - y). \quad (22)$$

3. Hessián funkcie $f(x)$ je kladne definitný, teda $\nabla^2 f(x) \succ 0$.

□

Definícia 0.29 (Striktne konkávna funkcia). Funkcia $f(x)$ je striktne konkávna ak platí aspoň jedna z nasledovných podmienok:

1. Funkcia $-f(x)$ je striktne konvexná.
2. Pre ľubovoľné dva body y a z z definičného oboru funkcie spĺňajúce $y \neq z$ a pre všetky hodnoty θ z intervalu 0 až 1 platí, že

$$f(\theta y + (1 - \theta)z) > \theta f(y) + (1 - \theta)f(z). \quad (23)$$

3. Pre ľubovoľné dva body y a z z definičného oboru funkcie spĺňajúce $y \neq z$ platí, že

$$f(z) < f(y) + \nabla f(y)^\top (z - y). \quad (24)$$

4. Hessián funkcie $f(x)$ je záporne definitný, teda $\nabla^2 f(x) \prec 0$.

□

Príklad 0.1. V tomto príklade ukážeme, ako pomocou podmienok uvedených v definícii 0.24 overiť, že funkcia $f(x) = x^2$ je konvexná funkcia.

Začneme dôkazom, že podmienka (16), je splnená pre ľubovoľné dva body y a z , ako i pre všetky hodnoty $\theta \in [0, 1]$. Za $f(y)$ dosadíme funkčnú hodnotu v bode y , ktorá je rovná y^2 . Podobne $f(z) = z^2$ a nakoniec $f(\theta y + (1 - \theta)z) = (\theta y + (1 - \theta)z)^2$. Podmienka (16) bude teda v tvare

$$(\theta y + (1 - \theta)z)^2 \leq \theta y^2 + (1 - \theta)z^2. \quad (25)$$

Expanzia ľavej strany nerovnice vedie na

$$\theta^2 y^2 + 2\theta(1 - \theta)yz + (1 - \theta)^2 z^2 \leq \theta y^2 + (1 - \theta)z^2. \quad (26)$$

0.1 Základné pojmy a definície

Prenesením členov z ľavej strany na pravú dostávame

$$0 \leq \theta y^2 - \theta^2 y^2 - 2\theta(1 - \theta)yz + (1 - \theta)z^2 - (1 - \theta)^2 z^2. \quad (27)$$

Vyjmutím θ , y^2 a z^2 pred/za zátvorku nerovnicu (27) upravíme do tvaru

$$0 \leq \theta(1 - \theta)y^2 - 2\theta(1 - \theta)yz + \theta(1 - \theta)z^2. \quad (28)$$

Následne pred zátvorku vyjmeme $\theta(1 - \theta)$ a dostaneme

$$0 \leq \theta(1 - \theta)(y^2 - 2yz + z^2). \quad (29)$$

Výraz v druhej zátvorke je pritom rovný $(y - z)^2$, ktorý, ako vieme, je nezáporný pre ľubovoľné hodnoty y a z . Na to, aby bol nezáporný celý produkt $\theta(1 - \theta)(y - z)^2$ je potrebné dokázať, že $\theta(1 - \theta)$ je nezáporné pre všetky $\theta \in [0, 1]$. Keďže $\theta(1 - \theta) = \theta - \theta^2$ a keďže zjavne platí $\theta^2 \leq \theta$ pre všetky $\theta \in [0, 1]$, platí, že $\theta(1 - \theta) \geq 0$ pre všetky $\theta \in [0, 1]$ a preto je celý výraz na pravej strane nerovnosti (29) vždy nenegatívny. Preto je nerovnosť v (16) splnená pre ľubovoľné dva body y a z , ako i pre všetky hodnoty $\theta \in [0, 1]$ a funkcia $f(x) = x^2$ je teda konvexná.

Dôkaz konvexnosti funkcie x^2 podľa podmienky (17) vyžaduje poznať gradient funkcie, čo je v našom prípade (keďže sa jedná o skalárnu funkciu jednej premennej) jej prvá derivácia, teda $\nabla f(x) = 2x$. Podmienka (17) bude teda v tvare

$$z^2 \geq y^2 + 2y(z - y), \quad (30)$$

ktorá musí platiť pre všetky možné hodnoty z a y (keďže definičným oborom funkcie x^2 je $\mathbb{R}$). Expanzia zátvorky v pravej časti nerovnosti dáva

$$z^2 \geq y^2 + 2yz - 2y^2, \quad (31)$$

čo po úprave je

$$z^2 \geq -y^2 + 2yz. \quad (32)$$

Presunom členov z pravej časti nerovnosti na ľavú stranu dostaneme

$$z^2 - 2yz + y^2 \geq 0, \quad (33)$$

čo sa dá pomocou známeho vzorca $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ zapísať ako

$$(z - y)^2 \geq 0. \quad (34)$$

Keďže a^2 je nezáporné pre všetky hodnoty a , vidíme, že nerovnosť $(z - y)^2 \geq 0$ je splnená pre ľubovoľnú hodnotu z a y , preto podmienka (17) platí pre všetky hodnoty z a y a funkcia x^2 je teda konvexná.

Dôkaz konvexnosti podľa podmienky (18) vyžaduje poznať Hessián funkcie $f(x)$. V našom prípade je totožný s druhou deriváciou funkcie x^2 , teda $\nabla^2 f(x) = 2$. Vidíme, že Hessián je konštantný (nezávisí od x) a je kladne semidefinitný (skalár je kladne semidefinitný vtedy, keď jeho hodnota je nezáporná). Preto je funkcia x^2 konvexná.

Zoznam literatúry

- [1] Boyd, S., Boyd, S. P., & Vandenberghe, L. (2004). *Convex optimization*. Cambridge university press.
- [2] Bertsekas, D. P. (2009). *Convex optimization theory* (pp. pp-157). Belmont: Athena Scientific.
- [3] Ben-Tal, A., & Nemirovski, A. (2001). Lectures on modern convex optimization: analysis, algorithms, and engineering applications. Society for industrial and applied mathematics.
- [4] Rockafeller, R. T. (1976). Lagrange multipliers in optimization. In *SIAM-AMS Proceedings* (Vol. 9, pp. 145-168).
- [5] Törn, A., & Žilinskas, A. (1989). *Global optimization* (Vol. 350). Berlin: Springer-Verlag.
- [6] Antoniou, A., & Lu, W. S. (2007). Practical optimization: algorithms and engineering applications. Springer Science & Business Media.
- [7] Papadimitriou, C. H., & Steiglitz, K. (1998). Combinatorial optimization: algorithms and complexity. Courier Corporation.
- [8] Horst, R., & Pardalos, P. M. (Eds.). (2013). *Handbook of global optimization* (Vol. 2). Springer Science & Business Media.
- [9] Frank, M., & Wolfe, P. (1956). An algorithm for quadratic programming. *Naval research logistics quarterly*, 3(1-2), 95-110.
- [11] Fikar, M. (2007). Dynamická optimalizácia procesov. Bratislava: E-Akadémia STU.
- [12] Halická, M., Brunovský, P., & Jurča, P. (1999). Optimálne riadenie I. *Institute of Applied Mathematics FMFI UK*.