RÚRKOVÝ VÝMENNÍK TEPLA – TROJKAPACITNÝ, PROTIPRÚDOVÝ

Dynamický matematický model (DMM)

Zjednodušujúce predpoklady pre odvodenie DMM trojkapacitného protiprúdového rúrkového výmenníka tepla sú rovnaké ako pri súprudovom usporiadaní.

DMM trojkapacitného protiprúdového výmenníka tepla:

- horúca kvapalina

$$\dot{Q}_1(z,t) = \dot{Q}_1(z+\mathrm{d}z,t) + \dot{Q}_{12}(z,t) + \frac{\partial Q_1(z,t)}{\partial t}$$

- stena vnútornej rúrky

$$\dot{Q}_{12}(z,t) = \dot{Q}_{23}(z,t) + \frac{\partial Q_2(z,t)}{\partial t}$$

- studená kvapalina

$$\dot{Q}_3(z+\mathrm{d}z,t) + \dot{Q}_{23}(z,t) = \dot{Q}_3(z,t) + \frac{\partial Q_3(z,t)}{\partial t}$$

Po vyjadrení tepelných tokov a tepiel ako pri súprudovom usporiadaní dostaneme DMM trojkapacitného rúrkového výmenníka tepla, ktorý je opísaný tromi lineárnymi parciálnymi diferenciálnymi rovnicami:

- horúca kvapalina

$$q_1 \rho_1 c_{p1} \vartheta_1(z,t) =$$

$$q_1 \rho_1 c_{p1} \left[\vartheta_1(z,t) + \frac{\partial \vartheta_1(z,t)}{\partial z} \mathrm{d}z \right] + \alpha_{12} \mathrm{d}A_{12} \left[\vartheta_1(z,t) - \vartheta_2(z,t) \right] + \frac{\partial \left[\mathrm{d}V_1 \rho_1 c_{p1} \vartheta_1(z,t) \right]}{\partial t}$$

Na jej riešenie potrebujeme 2 typy podmienok:

1. začiatočnú: $\vartheta_1(z, t_0 = 0) = \vartheta_1(z,0) = \vartheta_1^s(z)$
2. okrajovú: $\vartheta_1(z = 0, t) = \vartheta_1(0,t) = \vartheta_{1,0}(t)$

- stena vnútornej rúrky

$$\alpha_{12}\mathrm{d}A_{12}\left[\vartheta_1(z,t)-\vartheta_2(z,t)\right]=\alpha_{23}\mathrm{d}A_{23}\left[\vartheta_2(z,t)-\vartheta_3(z,t)\right]+\frac{\partial\left[\mathrm{d}V_2\rho_2 c_{p2}\vartheta_2(z,t)\right]}{\partial t}$$

Na jej riešenie potrebujeme 1 typ podmienok:

1. začiatočnú: $\vartheta_2(z,t_0=0)=\vartheta_2(z,0)=\vartheta_2^s(z)$

- studená kvapalina

$$q_3\rho_3 c_{p3}\left[\vartheta_3(z,t)+\frac{\partial\vartheta_3(z,t)}{\partial z}\mathrm{d}z\right]+\alpha_{23}dA_{23}\left[\vartheta_2(z,t)-\vartheta_3(z,t)\right]=$$

$$q_3\rho_3 c_{p3}\vartheta_3(z,t)+\frac{\partial\left[\mathrm{d}V_3\rho_3 c_{p3}\vartheta_3(z,t)\right]}{\partial t}$$

Na jej riešenie potrebujeme 2 typy podmienok:

1. začiatočnú: $\vartheta_3(z,t_0=0)=\vartheta_3(z,0)=\vartheta_3^s(z)$
2. okrajovú: $\vartheta_3(z=l,t)=\vartheta_3(l,t)=\vartheta_{3,n}(t)$

DMM trojkapacitného rúrkového výmenníka tepla má tvar lineárneho stavového opisu systému so spojito rozloženými parametrami s nenulovými začiatočnými podmienkami, kde:

- stavové veličiny: $\vartheta_1(z,t), \vartheta_2(z,t), \vartheta_3(z,t)$
- vstupné veličiny: $\vartheta_{1,0}(t)$, $\vartheta_{3,n}(t)$

Výstupné veličiny sú tie, ktoré sa na procese sledujú a môžu byť definované rôzne.

- výstupné veličiny napr.: $\vartheta_1(z,t), \vartheta_3(z,t)$

alebo $\vartheta_1(z=l,t)=\vartheta_{1,n}(t)$, $\vartheta_3(z=0,t)=\vartheta_{3,0}(t)$

Definovanie časových konštánt, rýchlostí prúdenia a zosilnení

- určenie časových konštánt, zosilnení a rýchlostí prúdenia je analogické ako u súprudového usporiadania

DMM trojkapacitného rúrkového výmenníka tepla po zavedení časových konštánt, rýchlostí prúdenia, zosilnení:

$$T_1 \frac{\partial \vartheta_1(z,t)}{\partial t} + T_1 w_1 \frac{\partial \vartheta_1(z,t)}{\partial z} = -\vartheta_1(z,t) + \vartheta_2(z,t)$$

$$\vartheta_1(z,0) = \vartheta_1^s(z)$$

$$\vartheta_1(0,t) = \vartheta_{1,0}(t)$$

$$T_2 \frac{\partial \vartheta_2(z,t)}{\partial t} = Z_{21}\vartheta_1(z,t) - \vartheta_2(z,t) + Z_{23}\vartheta_3(z,t)$$

$$\vartheta_2(z,0) = \vartheta_2^s(z)$$

$$T_3 \frac{\partial \vartheta_3(z,t)}{\partial t} - T_3 w_3 \frac{\partial \vartheta_3(z,t)}{\partial z} = \vartheta_2(z,t) - \vartheta_3(z,t)$$

$$\vartheta_3(z,0) = \vartheta_3^s(z)$$

$$\vartheta_3(l,t) = \vartheta_{3,n}(t)$$

Matematický model rovnovážneho stavu (MMRS)

- horúca kvapalina

$$T_1 w_1 \frac{\mathrm{d}\vartheta_1^s(z)}{\mathrm{d}z} = -\vartheta_1^s(z) + \vartheta_2^s(z) \qquad \vartheta_1^s(z=0) = \vartheta_{1,0}^s$$

- stena vnútornej rúrky

$$0 = Z_{21}\vartheta_1^s(z) - \vartheta_2^s(z) + Z_{23}\vartheta_3^s(z)$$

- studená kvapalina

$$-T_3 w_3 \frac{\mathrm{d}\vartheta_3^s(z)}{\mathrm{d}z} = \vartheta_2^s(z) - \vartheta_3^s(z) \qquad \vartheta_3^s(z=l) = \vartheta_{3,n}^s$$

MMRS trojkapacitného protiprúdového rúrkového výmenníka tepla je opísaný 2 lineárnymi ODCR (každá z nich má jednu okrajovú podmienku) a 1 AR.

Riešenie rovnovážneho stavu

1. riešením 2 obyčajných diferenciálnych rovníc s 2 okrajovými podmienkami danými na opačných koncoch výmenníka a 1 algebraickej rovnice

2. diskretizáciou, keď okrajové podmienky sú dané na opačných koncoch výmenníka

Riešenie rovnovážneho stavu trojkapacitného protiprúdového rúrkového výmenníka tepla sa robí iteračne.

Riešenie rovnovážneho stavu diskretizáciou

Diskretizácia:

1. rozdelenie výmenníka tepla na n-úsekov o dĺžke Δz

$$n = \frac{l}{\Delta z} \qquad \text{resp.} \qquad \Delta z = \frac{l}{n}$$

2. náhrada derivácie v MMRS spätnou diferenciou - lebo pri iteračnom riešení urobíme odhad teploty studenej kvapaliny na začiatku výmenníka

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta_1^s(z)}{\mathrm{d}z} \approx \frac{\Delta\vartheta_1^s(z)}{\Delta z} = \frac{\vartheta_1^s(z_i) - \vartheta_1^s(z_{i-1})}{z_i - z_{i-1}} = \frac{\vartheta_{1,i}^s - \vartheta_{1,i-1}^s}{\Delta z}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta_3^s(z)}{\mathrm{d}z} \approx \frac{\Delta\vartheta_3^s(z)}{\Delta z} = \frac{\vartheta_3^s(z_i) - \vartheta_3^s(z_{i-1})}{z_i - z_{i-1}} = \frac{\vartheta_{3,i}^s - \vartheta_{3,i-1}^s}{\Delta z}$$

- po dosadení do MMRS dostaneme MMRS pre i-tý úsek:

$$T_1 w_1 \frac{\vartheta_{1,i}^s - \vartheta_{1,i-1}^s}{\Delta z} = -\vartheta_{1,i}^s + \vartheta_{2,i}^s,$$

$$0 = Z_{21}\vartheta_{1,i}^s - \vartheta_{2,i}^s + Z_{23}\vartheta_{3,i}^s \qquad\qquad i = 1,\ldots,n$$

$$-T_3 w_3 \frac{\vartheta_{3,i}^s - \vartheta_{3,i-1}^s}{\Delta z} = \vartheta_{2,i}^s - \vartheta_{3,i}^s$$

- po úprave a definovaní

$$b_1 = \frac{T_1 w_1}{\Delta z}, \qquad a_1 = \frac{T_1 w_1}{\Delta z} + 1 = b_1 + 1$$

$$b_3 = -\frac{T_3 w_3}{\Delta z}, \quad a_3 = -\frac{T_3 w_3}{\Delta z} + 1 = b_3 + 1$$

dostaneme MMRS pre i-tý úsek v tvare vhodnom pre riešenie sústavy lin. alg. rovníc v MATLABe:

$$a_1 \vartheta_{1,i}^s - \vartheta_{2,i}^s = b_1 \vartheta_{1,i-1}^s$$

$$Z_{21} \vartheta_{1,i}^s - \vartheta_{2,i}^s + Z_{23} \vartheta_{3,i}^s = 0 \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$-\vartheta_{2,i}^s + a_3 \vartheta_{3,i}^s = b_3 \vartheta_{3,i-1}^s$$

Postup pri iteračnom riešení:

1. Odhad $\vartheta_3^s(z=0)=\vartheta_{3,0}^s$

2. Riešenie RS riešením sústavy 3 lin. alg. rovníc pre i=1,...,*n*.

3. Kontrola, či sa vypočítaná teplota $\vartheta_3^s(z=l)=\vartheta_{3,n}^s$ zhoduje s požadovanou presnosťou s teplotou vstupujúceho prúdu studenej kvapaliny.

4. Ak nie, urobí sa nový odhad $\vartheta_3^s(z=0)=\vartheta_{3,0}^s$

   a riešenie sa vráti na bod 2.

   Ak áno, RS výmenníka je vypočítaný.

Sledovanie dynamiky po diskretizácii

- náhrada derivácie podľa *z* v DMM spätnou diferenciou

$$\frac{\partial \vartheta_1(z,t)}{\partial z} \approx \frac{\Delta \vartheta_1(z,t)}{\Delta z} = \frac{\vartheta_1(z_i,t) - \vartheta_1(z_{i-1},t)}{z_i - z_{i-1}} = \frac{\vartheta_{1,i}(t) - \vartheta_{1,i-1}(t)}{\Delta z}$$

- náhrada derivácie podľa *z* v DMM doprednou diferenciou

$$\frac{\partial \vartheta_3(z,t)}{\partial z} \approx \frac{\Delta \vartheta_3(z,t)}{\Delta z} = \frac{\vartheta_3(z_{i+1},t) - \vartheta_3(z_i,t)}{z_{i+1} - z_i} = \frac{\vartheta_{3,i+1}(t) - \vartheta_{3,i}(t)}{\Delta z}$$

- po dosadení do DMM dostaneme pre úseky 1, ..., *n*-1:

$$T_1 \frac{d\vartheta_{1,i}(t)}{dt} + T_1 w_1 \frac{\vartheta_{1,i}(t) - \vartheta_{1,i-1}(t)}{\Delta z} = -\vartheta_{1,i}(t) + \vartheta_{2,i}(t) \qquad \vartheta_{1,i}(t=0) = \vartheta_{1,i}(0) = \vartheta_{1,i}^s$$

$$T_2 \frac{d\vartheta_{2,i}(t)}{dt} = Z_{21}\vartheta_{1,i}(t) - \vartheta_{2,i}(t) + Z_{23}\vartheta_{3,i}(t) \qquad \vartheta_{2,i}(t=0) = \vartheta_{2,i}(0) = \vartheta_{2,i}^s$$

$$T_3 \frac{d\vartheta_{3,i}(t)}{\mathrm{d}t} - T_3 w_3 \frac{\vartheta_{3,i+1}(t) - \vartheta_{3,i}(t)}{\Delta z} = \vartheta_{2,i}(t) - \vartheta_{3,i}(t) \qquad \vartheta_{3,i}(t=0) = \vartheta_{3,i}(0) = \vartheta_{3,i}^s$$

$$i = 1, \dots, n-1$$

- pre 0-tý úsek:

$$T_2 \frac{d\vartheta_{2,0}(t)}{dt} = Z_{21}\vartheta_{1,0}(t) - \vartheta_{2,0}(t) + Z_{23}\vartheta_{3,0}(t) \qquad \vartheta_{2,0}(t=0) = \vartheta_{2,0}(0) = \vartheta_{2,0}^{s}$$

$$T_3 \frac{d\vartheta_{3,0}(t)}{\mathrm{dt}} - T_3 w_3 \frac{\vartheta_{3,1}(t) - \vartheta_{3,0}(t)}{\Delta z} = \vartheta_{2,0}(t) - \vartheta_{3,0}(t) \qquad \vartheta_{3,0}(t=0) = \vartheta_{3,0}(0) = \vartheta_{3,0}^{s}$$

- pre n-tý úsek:

$$T_1 \frac{d\vartheta_{1,n}(t)}{dt} + T_1 w_1 \frac{\vartheta_{1,n}(t) - \vartheta_{1,n-1}(t)}{\Delta z} = -\vartheta_{1,n}(t) + \vartheta_{2,n}(t), \qquad \vartheta_{1,n}(t=0) = \vartheta_{1,n}(0) = \vartheta_{1,n}^{s}$$

$$T_2 \frac{d\vartheta_{2,n}(t)}{dt} = Z_{21}\vartheta_{1,n}(t) - \vartheta_{2,n}(t) + Z_{23}\vartheta_{3,n}(t) \qquad \vartheta_{2,n}(t=0) = \vartheta_{2,n}(0) = \vartheta_{2,n}^{s}$$

- po použití definovaných konštánt a_1, b_1 , a_3, b_3 dostaneme:

pre úseky 1, ..., n-1:

$$\frac{d\vartheta_{1,i}(t)}{dt} = -\frac{a_1}{T_1}\vartheta_{1,i}(t) + \frac{b_1}{T_1}\vartheta_{1,i-1}(t) + \frac{1}{T_1}\vartheta_{2,i}(t) \qquad \vartheta_{1,i}(t=0) = \vartheta_{1,i}(0) = \vartheta_{1,i}^{s}$$

$$\frac{d\vartheta_{2,i}(t)}{dt} = \frac{Z_{21}}{T_2}\vartheta_{1,i}(t) - \frac{1}{T_2}\vartheta_{2,i}(t) + \frac{Z_{23}}{T_2}\vartheta_{3,i}(t)$$

$$\frac{d\vartheta_{3,i}(t)}{dt} = -\frac{b_3}{T_3}\vartheta_{3,i+1}(t) - \frac{(1-b_3)}{T_3}\vartheta_{3,i}(t) + \frac{1}{T_3}\vartheta_{2,i}(t) \qquad \vartheta_{3,i}(t=0) = \vartheta_{3,i}(0) = \vartheta_{3,i}^{s}$$

$$i = 1,\ldots,n-1$$

pre 0-tý úsek:

$$\frac{d\vartheta_{2,0}(t)}{dt} = \frac{Z_{21}}{T_2}\vartheta_{1,0}(t) - \frac{1}{T_2}\vartheta_{2,0}(t) + \frac{Z_{23}}{T_2}\vartheta_{3,0}(t)$$

$$\frac{d\vartheta_{3,0}(t)}{dt} = -\frac{b_3}{T_3}\vartheta_{3,1}(t) - \frac{(1-b_3)}{T_3}\vartheta_{3,0}(t) + \frac{1}{T_3}\vartheta_{2,0}(t) \qquad \vartheta_{3,0}(t=0) = \vartheta_{3,0}(0) = \vartheta_{3,0}^{s}$$

pre n-tý úsek:

$$\frac{d\vartheta_{1,n}(t)}{dt} = -\frac{a_1}{T_1}\vartheta_{1,n}(t) + \frac{b_1}{T_1}\vartheta_{1,n-1}(t) + \frac{1}{T_1}\vartheta_{2,n}(t) \qquad \vartheta_{1,n}(t=0) = \vartheta_{1,n}(0) = \vartheta_{1,n}^{s}$$

$$\frac{d\vartheta_{2,n}(t)}{dt} = \frac{Z_{21}}{T_2}\vartheta_{1,n}(t) - \frac{1}{T_2}\vartheta_{2,n}(t) + \frac{Z_{23}}{T_2}\vartheta_{3,n}(t)$$

Simulácia dynamických vlastností po úsekoch

- definujeme veličiny pre i-tý úsek, i=1,...,n-1

vstupné: $\vartheta_{1,i-1}(t),\ \vartheta_{3,i+1}(t)$

stavové: $\vartheta_{1,i}(t),\ \vartheta_{2,i}(t),\ \vartheta_{3,i}(t),$

výstupné: $\vartheta_{1,i}(t),\ \vartheta_{3,i}(t),$

- vytvoríme matice A, B, C, D LSO pre i-tý úsek, i=1,...,n-1

- definujeme veličiny pre 0-tý úsek

vstupné: $\vartheta_{1,0}(t), \vartheta_{3,1}(t)$

stavové: $\vartheta_{2,0}(t)$, $\vartheta_{3,0}(t)$,

výstupné: $\vartheta_{3,0}(t)$,

- vytvoríme matice *A*, *B*, *C*, *D* LSO pre 0-tý úsek

- definujeme veličiny pre n-tý úsek

vstupné: $\vartheta_{1,n-1}(t), \vartheta_{3,n}(t)$

stavové: $\vartheta_{1,n}(t)$, $\vartheta_{2,n}(t)$

výstupné: $\vartheta_{1,n}(t)$

- vytvoríme matice *A*, *B*, *C*, *D* LSO pre *n*-tý úsek

Simulácia dynamických vlastností po úsekoch