SYSTÉMY SO SPOJITO ROZLOŽENÝMI PARAMETRAMI

RÚRKOVÝ VÝMENNÍK TEPLA – TROJKAPACITNÝ, SÚPRUDOVÝ

Dynamický matematický model (DMM)

Zjednodušujúce predpoklady pre odvodenie DMM rúrkového výmenníka tepla - všeobecné:

- platia ako pre jednokapacitný rúrkový výmenník

Zjednodušujúce predpoklady pre odvodenie DMM rúrkového výmenníka tepla - jednokapacitného:

- zanedbáme tepelnú kapacitu steny vonkajšej rúrky

DMM trojkapacitného výmenníka tepla:

- horúca kvapalina

$$\dot{Q}_1(z,t) = \dot{Q}_1(z+\mathrm{d}z,t) + \dot{Q}_{12}(z,t) + \frac{\partial Q_1(z,t)}{\partial t}$$

- stena vnútornej rúrky

$$\dot{Q}_{12}(z,t) = \dot{Q}_{23}(z,t) + \frac{\partial Q_2(z,t)}{\partial t}$$

- studená kvapalina

$$\dot{Q}_3(z,t) + \dot{Q}_{23}(z,t) = \dot{Q}_3(z+\mathrm{d}z,t) + \frac{\partial Q_3(z,t)}{\partial t}$$

- ďalšie predpoklady:
  - konštantné parametre: hustoty, špecifické tepelné kapacity, koeficienty prestupu tepla prúdením, elementy plochy prestupu tepla, elementy objemu
  - rovnaké referenčné teploty pre všetky členy bilancií
- po vyjadrení:

$$\dot{Q}_1(z,t) = \dot{m}_1 c_{p1} \vartheta_1(z,t) = q_1 \rho_1 c_{p1} \vartheta_1(z,t)$$

$$\dot{Q}_1(z+\mathrm{d}z,t) = \dot{m}_1 c_{p1} \vartheta_1(z+\mathrm{d}z,t) = q_1 \rho_1 c_{p1} \left[\vartheta_1(z,t) + \frac{\partial \vartheta_1(z,t)}{\partial z} \mathrm{d}z \right]$$

$$\dot{Q}_{12}(z,t) = \alpha_{12} \mathrm{d}A_{12} \left[\vartheta_1(z,t) - \vartheta_2(z,t) \right]$$

$$Q_1(z,t) = \mathrm{d}V_1 \rho_1 c_{\mathrm{p}1} \vartheta_1(z,t)$$

$$\dot{Q}_{23}(z,t) = \alpha_{23}\mathrm{d}A_{23}\left[\vartheta_2(z,t) - \vartheta_3(z,t)\right]$$

$$Q_2(z,t) = \mathrm{dV}_2\rho_2 c_{\mathrm{p}2}\vartheta_2\left(z,t\right)$$

$$\dot{Q}_3(z,t) = \dot{m}_3 c_{p3}\vartheta_3(z,t) = q_3\rho_3 c_{p3}\vartheta_3(z,t)$$

$$\dot{Q}_{23}(z,t) = \alpha_{23}\mathrm{d}A_{23}\left[\vartheta_2(z,t) - \vartheta_3(z,t)\right]$$

$$\dot{Q}_3(z+\mathrm{d}z,t) = \dot{m}_3 c_{p3}\vartheta_3(z+\mathrm{d}z,t) = q_3\rho_3 c_{p3}\left[\vartheta_3(z,t) + \frac{\partial\vartheta_3(z,t)}{\partial z}\mathrm{d}z\right]$$

$$Q_3(z,t) = \mathrm{dV}_3\rho_3 c_{\mathrm{p}3}\vartheta_3\left(z,t\right)$$

DMM trojkapacitného rúrkového výmenníka tepla je opísaný tromi lineárnymi parciálnymi diferenciálnymi rovnicami

- horúca kvapalina

$$q_1\rho_1 c_{p1}\vartheta_1(z,t) =$$

$$q_1\rho_1 c_{p1}\left[\vartheta_1(z,t)+\frac{\partial\vartheta_1(z,t)}{\partial z}\mathrm{d}z\right]+\alpha_{12}\mathrm{d}A_{12}\left[\vartheta_1(z,t)-\vartheta_2(z,t)\right]+\frac{\partial\left[\mathrm{d}V_1\rho_1 c_{p1}\vartheta_1(z,t)\right]}{\partial t}$$

Na jej riešenie potrebujeme 2 typy podmienok:

- začiatočnú: $\vartheta_1(z,t_0=0)=\vartheta_1(z,0)=\vartheta_1^s(z)$
- okrajovú: $\vartheta_1(z=0,t)=\vartheta_1(0,t)=\vartheta_{1,0}(t)$

- stena vnútornej rúrky

$$\alpha_{12}\mathrm{d}A_{12}\left[\vartheta_1(z,t)-\vartheta_2(z,t)\right]=\alpha_{23}\mathrm{d}A_{23}\left[\vartheta_2(z,t)-\vartheta_3(z,t)\right]+\frac{\partial\left[\mathrm{d}V_2\rho_2 c_{p2}\vartheta_2(z,t)\right]}{\partial t}$$

Na jej riešenie potrebujeme 1 typ podmienok:

- začiatočnú: $\vartheta_2(z,t_0=0)=\vartheta_2(z,0)=\vartheta_2^s(z)$

- studená kvapalina

$$q_3\rho_3 c_{p3}\vartheta_3(z,t)+\alpha_{23}dA_{23}\left[\vartheta_2(z,t)-\vartheta_3(z,t)\right]=$$

$$q_3\rho_3 c_{p3}\left[\vartheta_3(z,t)+\frac{\partial\vartheta_3(z,t)}{\partial z}\mathrm{dz}\right]+\frac{\partial\left[\mathrm{d}V_1\rho_1 c_{p1}\vartheta_1(z,t)\right]}{\partial t}$$

Na jej riešenie potrebujeme 2 typy podmienok:

- začiatočnú: $\vartheta_3(z,t_0=0)=\vartheta_3(z,0)=\vartheta_3^s(z)$
- okrajovú: $\vartheta_3(z=0,t)=\vartheta_3(0,t)=\vartheta_{3,0}(t)$

DMM trojkapacitného rúrkového výmenníka tepla má tvar lineárneho stavového opisu systému so spojito rozloženými parametrami s nenulovými začiatočnými podmienkami, kde:

- stavové veličiny: $\vartheta_1(z,t), \vartheta_2(z,t), \vartheta_3(z,t)$
- vstupné veličiny: $\vartheta_{1,0}(t), \vartheta_{3,0}(t)$

Výstupné veličiny sú tie, ktoré sa na procese sledujú a môžu byť definované rôzne.

- výstupné veličiny napr.: $\vartheta_1(z,t), \vartheta_3(z,t)$

alebo $\vartheta_1(z=l,t)=\vartheta_{1,n}(t), \vartheta_3(z=l,t)=\vartheta_{3,n}(t)$

Definovanie časových konštánt, zosilení a rýchlostí prúdenia

- určenie časových konštánt po úprave DMM do tvaru s konštantami -1 alebo 1 pred nederivovanou stavovou veličinou:

$$T_1 = \frac{\mathrm{d}V_1 \rho_1 c_{p1}}{\alpha_{12} \mathrm{d}A_{12}}, \qquad \text{kde} \qquad dV_1 = S_1 \mathrm{dz} = \pi R_1^2 \mathrm{dz} = \pi \frac{D_1^2}{4} \mathrm{dz}$$

$$dA_{12} = O_1 \mathrm{dz} = 2\pi R_1 \mathrm{dz} = \pi D_1 \mathrm{dz}$$

$$T_2 = \frac{\mathrm{d}V_2 \rho_2 c_{p2}}{\alpha_{12} \mathrm{d}A_{12} + \alpha_{23} \mathrm{d}A_{23}}, \qquad \text{kde} \qquad dV_2 = S_2 \mathrm{dz} = \pi \left(R_2^2 - R_1^2 \right) \mathrm{dz} = \pi \frac{D_2^2 - D_1^2}{4} \mathrm{dz}$$

$$dA_{23} = O_2 \mathrm{dz} = 2\pi R_2 \mathrm{dz} = \pi D_2 \mathrm{dz}$$

$$T_3 = \frac{\mathrm{d}V_3 \rho_3 c_{p3}}{\alpha_{23} \mathrm{d}A_{23}}, \qquad \text{kde} \qquad dV_3 = S_3 \mathrm{dz} = \pi \left(R_3^2 - R_2^2 \right) \mathrm{dz} = \pi \frac{D_3^2 - D_2^2}{4} \mathrm{dz}$$

- určenie rýchlosti prúdenia:

$$\frac{q_1\rho_1 c_{p1}\mathrm{d}z}{\alpha_{12}\mathrm{d}A_{12}} = \frac{q_1\rho_1 c_{p1}\mathrm{d}z}{\alpha_{12}\mathrm{d}A_{12}}.\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}V_1} = T_1.\frac{q_1\mathrm{d}z}{\mathrm{d}V_1} = T_1.\frac{q_1\mathrm{d}z}{S_1\mathrm{d}z} = T_1.\frac{q_1}{S_1} = T_1.w_1$$

$$\frac{q_3\rho_3 c_{p3}\mathrm{d}z}{\alpha_{23}\mathrm{d}A_{23}} = \frac{q_3\rho_3 c_{p3}\mathrm{d}z}{\alpha_{23}\mathrm{d}A_{23}}.\frac{\mathrm{d}V_3}{\mathrm{d}V_3} = T_3.\frac{q_3\mathrm{d}z}{\mathrm{d}V_3} = T_3.\frac{q_3\mathrm{d}z}{S_3\mathrm{d}z} = T_3.\frac{q_3}{S_3} = T_3.w_3$$

- určenie zosilnení:

$$Z_{21} = \frac{\alpha_{12}\mathrm{d}A_{12}}{\alpha_{12}\mathrm{d}A_{12} + \alpha_{23}\mathrm{d}A_{23}}$$

$$Z_{23} = \frac{\alpha_{23}\mathrm{d}A_{23}}{\alpha_{12}\mathrm{d}A_{12} + \alpha_{23}\mathrm{d}A_{23}}$$

DMM trojkapacitného rúrkového výmenníka tepla po zavedení časovej konštanty a rýchlosti prúdenia:

$$T_1 \frac{\partial \vartheta_1(z,t)}{\partial t} + T_1 w_1 \frac{\partial \vartheta_1(z,t)}{\partial z} = -\vartheta_1(z,t) + \vartheta_2(z,t) \qquad \vartheta_1(z,0) = \vartheta_1^s(z)$$

$$\vartheta_1(0,t) = \vartheta_{1,0}(t)$$

$$T_2 \frac{\partial \vartheta_2(z,t)}{\partial t} = Z_{21}\vartheta_1(z,t) - \vartheta_2(z,t) + Z_{23}\vartheta_3(z,t) \qquad \vartheta_2(z,0) = \vartheta_2^s(z)$$

$$T_3 \frac{\partial \vartheta_3(z,t)}{\partial t} + T_3 w_3 \frac{\partial \vartheta_3(z,t)}{\partial z} = \vartheta_2(z,t) - \vartheta_3(z,t)$$

$$\vartheta_3(z,0) = \vartheta_3^s(z)$$

$$\vartheta_3(0,t) = \vartheta_{3,0}(t)$$

Matematický model rovnovážneho stavu

- horúca kvapalina

$$T_1 w_1 \frac{\mathrm{d}\vartheta_1^s(z)}{\mathrm{d}z} = -\vartheta_1^s(z) + \vartheta_2^s(z) \qquad \vartheta_1^s(z=0) = \vartheta_{1,0}^s$$

- stena vnútornej rúrky

$$0 = Z_{21}\vartheta_1^s(z) - \vartheta_2^s(z) + Z_{23}\vartheta_3^s(z)$$

- studená kvapalina

$$T_3 w_3 \frac{\mathrm{d}\vartheta_3^s(z)}{\mathrm{d}z} = \vartheta_2^s(z) - \vartheta_3^s(z) \qquad \vartheta_3^s(z=0) = \vartheta_{3,0}^s$$

MMRS trojkapacitného rúrkového výmenníka tepla je opísaný 2 lineárnymi ODCR a 1 AR.

Riešenie rovnovážneho stavu

1. riešením 2 obyčajných diferenciálnych rovníc a 1 algebraickej rovnice, ktoré opisujú rovnovážny stav
2. diskretizáciou

Riešenie rovnovážneho stavu diskretizáciou

Diskretizácia:

1. rozdelenie výmenníka tepla na n-úsekov o dĺžke Δz

$$n = \frac{l}{\Delta z}$$

2. náhrada derivácie v MMRS spätnou diferenciou

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta_1^s(z)}{\mathrm{d}z} \approx \frac{\Delta\vartheta_1^s(z)}{\Delta z} = \frac{\vartheta_1^s(z_i) - \vartheta_1^s(z_{i-1})}{z_i - z_{i-1}} = \frac{\vartheta_{1,i}^s - \vartheta_{1,i-1}^s}{\Delta z}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta_3^s(z)}{\mathrm{d}z} \approx \frac{\Delta\vartheta_3^s(z)}{\Delta z} = \frac{\vartheta_3^s(z_i) - \vartheta_3^s(z_{i-1})}{z_i - z_{i-1}} = \frac{\vartheta_{3,i}^s - \vartheta_{3,i-1}^s}{\Delta z}$$

- po dosadení do MMRS dostaneme MMRS pre i-tý úsek:

$$T_1 w_1 \frac{\vartheta_{1,i}^s - \vartheta_{1,i-1}^s}{\Delta z} = -\vartheta_{1,i}^s + \vartheta_{2,i}^s,$$

$$0 = Z_{21}\vartheta_{1,i}^s - \vartheta_{2,i}^s + Z_{23}\vartheta_{3,i}^s \qquad i = 1,\dots,n$$

$$T_3 w_3 \frac{\vartheta_{3,i}^s - \vartheta_{3,i-1}^s}{\Delta z} = -\vartheta_{3,i}^s + \vartheta_{2,i}^s,$$

- po úprave a definovaní

$$a_1 = \frac{T_1 w_1}{\Delta z} + 1, \quad b_1 = \frac{T_1 w_1}{\Delta z}$$

$$a_3 = \frac{T_3 w_3}{\Delta z} + 1, \quad b_3 = \frac{T_3 w_3}{\Delta z}$$

- dostaneme MMRS pre i-tý úsek:

$$\vartheta_{1,i}^{s} = \frac{b_1}{a_1}\vartheta_{1,i-1}^{s} + \frac{1}{a_1}\vartheta_{2,i}^{s} \ ,$$

$$0 = Z_{21}\vartheta_{1,i}^{s} - \vartheta_{2,i}^{s} + Z_{23}\vartheta_{3,i}^{s} \qquad\qquad i = 1,\dots,n$$

$$\vartheta_{3,i}^{s} = \frac{b_3}{a_3}\vartheta_{3,i-1}^{s} + \frac{1}{a_3}\vartheta_{2,i}^{s} \ ,$$

- tvar vhodný pre riešenie sústavy lin. alg. rovníc MATLABe:

$$\vartheta_{1,i}^{s} - \frac{1}{a_1}\vartheta_{2,i}^{s} \qquad\qquad = \frac{b_1}{a_1}\vartheta_{1,i-1}^{s}$$

$$Z_{21}\vartheta_{1,i}^{s} - \vartheta_{2,i}^{s} + Z_{23}\vartheta_{3,i}^{s} = 0 \qquad\qquad i = 1,\dots,n$$

$$-\frac{1}{a_3}\vartheta_{2,i}^{s} + \vartheta_{3,i}^{s} = \frac{b_3}{a_3}\vartheta_{3,i-1}^{s}$$

Sledovanie dynamiky po diskretizácii

- náhrada derivácie podľa *z* v DMM spätnou diferenciou

$$\frac{\partial \vartheta_1(z,t)}{\partial z} \approx \frac{\Delta \vartheta_1(z,t)}{\Delta z} = \frac{\vartheta_1(z_i,t) - \vartheta_1(z_{i-1},t)}{z_i - z_{i-1}} = \frac{\vartheta_{1,i}(t) - \vartheta_{1,i-1}(t)}{\Delta z}$$

$$\frac{\partial \vartheta_3(z,t)}{\partial z} \approx \frac{\Delta \vartheta_3(z,t)}{\Delta z} = \frac{\vartheta_3(z_i,t) - \vartheta_3(z_{i-1},t)}{z_i - z_{i-1}} = \frac{\vartheta_{3,i}(t) - \vartheta_{3,i-1}(t)}{\Delta z}$$

- po dosadení do DMM dostaneme pre i-tý úsek:

$$T_1 \frac{d\vartheta_{1,i}(t)}{dt} + T_1 w_1 \frac{\vartheta_{1,i}(t) - \vartheta_{1,i-1}(t)}{\Delta z} = -\vartheta_{1,i}(t) + \vartheta_{2,i}(t) \qquad \vartheta_{1,i}(t=0) = \vartheta_{1,i}(0) = \vartheta_{1,i}^{s}$$

$$T_2 \frac{d\vartheta_{2,i}(t)}{dt} = Z_{21}\vartheta_{1,i}(t) - \vartheta_{2,i}(t) + Z_{23}\vartheta_{3,i}(t) \qquad \vartheta_{2,i}(t=0) = \vartheta_{2,i}(0) = \vartheta_{2,i}^{s}$$

$$T_3 \frac{d\vartheta_{3,i}(t)}{\mathrm{d}t} + T_3 w_3 \frac{\vartheta_{3,i}(t) - \vartheta_{3,i-1}(t)}{\Delta z} = -\vartheta_{3,i}(t) + \vartheta_{2,i}(t) \qquad \vartheta_{3,i}(t=0) = \vartheta_{3,i}(0) = \vartheta_{3,i}^{s}$$

$$i = 1,\dots,n$$

- po použití definovaných konštánt a_1, b_1 , a_3, b_3 :

$$\frac{d\vartheta_{1,i}(t)}{dt} = -\frac{a_1}{T_1}\vartheta_{1,i}(t) + \frac{b_1}{T_1}\vartheta_{1,i-1}(t) + \frac{1}{T_1}\vartheta_{2,i}(t) \qquad \vartheta_{1,i}(t=0) = \vartheta_{1,i}(0) = \vartheta_{1,i}^{s}$$

$$\frac{d\vartheta_{2,i}(t)}{dt} = \frac{Z_{21}}{T_2}\vartheta_{1,i}(t) - \frac{1}{T_2}\vartheta_{2,i}(t) + \frac{Z_{23}}{T_2}\vartheta_{3,i}(t)$$

$$\frac{d\vartheta_{3,i}(t)}{dt} = -\frac{a_3}{T_3}\vartheta_{3,i}(t) + \frac{b_3}{T_3}\vartheta_{3,i-1}(t) + \frac{1}{T_3}\vartheta_{2,i}(t) \qquad \vartheta_{3,i}(t=0) = \vartheta_{3,i}(0) = \vartheta_{3,i}^{s}$$

$$i = 1,\ldots,n$$

Simulácia dynamických vlastností po úsekoch

- definujeme veličiny pre i-tý úsek:

vstupné: $\vartheta_{1,i-1}(t), \vartheta_{3,i-1}(t)$

stavové: $\vartheta_{1,i}(t), \vartheta_{2,i}(t), \vartheta_{3,i}(t),$

výstupné: $\vartheta_{1,i}(t), \vartheta_{3,i}(t),$

matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ stavového opisu

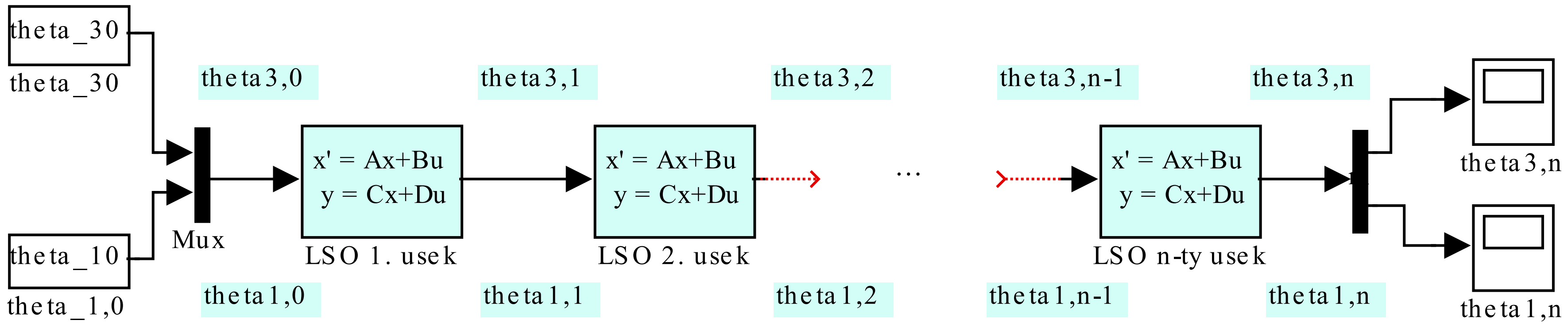
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -\frac{a_1}{T_1} & \frac{1}{T_1} & 0 \\ \frac{Z_{21}}{T_2} & -\frac{1}{T_2} & \frac{Z_{23}}{T_2} \\ 0 & \frac{1}{T_3} & -\frac{a_3}{T_3} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{T_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{b_3}{T_3} \end{pmatrix}$$

matice $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ stavového opisu pre zvolené výstupné veličiny

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a začiatočné podmienky sú nenulové.

Simulácia dynamických vlastností po úsekoch



Simulácia dynamických vlastností výmenníka ako celku

- definujeme veličiny pre celý výmenník:

vstupné: $\vartheta_{1,0}(t),\ \vartheta_{3,0}(t)$

stavové: $\vartheta_{1,1}(t),\ \vartheta_{2,1}(t),\ \vartheta_{3,1}(t), \ldots, \vartheta_{1,n}(t),\ \vartheta_{2,n}(t),\ \vartheta_{3,n}(t)$

výstupné: $\vartheta_{1,n}(t),\ \vartheta_{3,n}(t)$

matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ stavového opisu

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -\frac{a_1}{T_1} & \frac{1}{T_1} & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ \frac{Z_{21}}{T_2} & -\frac{1}{T_2} & \frac{Z_{23}}{T_2} & 0 & & & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_3} & -\frac{a_3}{T_3} & 0 & & & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & -\frac{a_1}{T_1} & \frac{1}{T_1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{Z_{21}}{T_2} & -\frac{1}{T_2} & \frac{Z_{23}}{T_2} \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & \frac{1}{T_3} & -\frac{a_3}{T_3} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \frac{b_1}{T_1} & \\ & \frac{b_3}{T_3} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matice $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ stavového opisu pre zvolené výstupné veličiny

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a začiatočné podmienky sú nenulové.

Simulácia dynamických vlastností ako celku