SYSTÉMY SO SPOJITO ROZLOŽENÝMI PARAMETRAMI

RÚRKOVÝ VÝMENNÍK TEPLA - JEDNOKAPACITNÝ

Dynamický matematický model (DMM)

Zjednodušujúce predpoklady pre odvodenie DMM rúrkového výmenníka tepla - všeobecné:

- systém nekoná prácu $\Rightarrow$ energetická bilancia $\rightarrow$ entalpická
- tlak v systéme je konštantný $\Rightarrow$ zmena entalpie $=$ zmene tepla $\Rightarrow$ entalpická bilancia $\rightarrow$ tepelná
- výmenník je dokonale izolovaný, straty tepla do okolia sú zanedbateľné
- prestup tepla len prúdením, zanedbáme prestup tepla vedením a žiarením.
- piestový tok kvapalín $\Rightarrow$ vlastnosti sa menia v dynamickom stave len v smere toku kvapaliny (z) a v čase (t) $\Rightarrow$ DMM sa získa bilanciou elementu systému

Entalpická bilancia elementu systému s prestupom tepla všeobecne:

$$\left\{\begin{matrix} \textit{tepelné toky} \\ \textit{do elementu} \\ \textit{systému} \\ \textit{vstupujúce} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \textit{tepelné toky} \\ \textit{z elementu} \\ \textit{systému} \\ \textit{vystupujúce} \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} \textit{rýchlosť akumulácie} \\ \textit{tepla} \\ \textit{v elemente} \\ \textit{systému} \end{matrix}\right\}$$

Zjednodušujúce predpoklady pre odvodenie DMM rúrkového výmenníka tepla - jednokapacitného:

- zanedbáme tepelné kapacity stien všetkých rúrok
- predpokladáme, že teplota chladiaceho média sa mení len v čase, pozdĺž výmenníka je konštantná

DMM jednokapacitného výmenníka tepla:

- horúca kvapalina

$$\dot{Q}_1(z,t) = \dot{Q}_1(z+\mathrm{d}z,t) + \dot{Q}_{13}(z,t) + \frac{\partial Q_1(z,t)}{\partial t}$$

- ďalšie predpoklady:
  - konštantné parametre: hustota, špecifická tepelná kapacita, úhrnný koeficient prestupu tepla prúdením (prechodu tepla), element plochy prestupu tepla, element objemu
  - rovnaké referenčné teploty pre všetky členy bilancie

- po vyjadrení:

$$\dot{Q}_1(z,t) = \dot{m}_1 c_{p1} \vartheta_1(z,t) = q_1 \rho_1 c_{p1} \vartheta_1(z,t)$$

$$\dot{Q}_1(z+\mathrm{d}z,t) = \dot{m}_1 c_{p1} \vartheta_1(z+\mathrm{d}z,t) = q_1 \rho_1 c_{p1}\left[\vartheta_1(z,t) + \frac{\partial \vartheta_1(z,t)}{\partial z}\mathrm{d}z\right]$$

$$\dot{Q}_{13}(z,t) = \alpha_{13}\mathrm{d}A_{13}\left[\vartheta_1(z,t) - \vartheta_3(t)\right]$$

$$Q_1(z,t) = \mathrm{d}V_1 \rho_1 c_{\mathrm{p}1} \vartheta_1\left(z,t\right)$$

DMM jednokapacitného rúrkového výmenníka tepla je opísaný jednou lineárnou parciálnou diferenciálnou rovnicou

$$q_1\rho_1 c_{p1}\vartheta_1(z,t) =$$

$$q_1\rho_1 c_{p1}\left[\vartheta_1(z,t) + \frac{\partial \vartheta_1(z,t)}{\partial z}\mathrm{d}z\right] + \alpha_{13}\mathrm{d}A_{13}\left[\vartheta_1(z,t) - \vartheta_3(t)\right] + \frac{\partial\left[\mathrm{d}V_1\rho_1 c_{p1}\vartheta_1(z,t)\right]}{\partial t}$$

Na jej riešenie potrebujeme 2 typy podmienok:

- začiatočnú: $\vartheta_1(z,t_0=0) = \vartheta_1(z,0) = \vartheta_1^s(z)$
- okrajovú: $\vartheta_1(z=0,t) = \vartheta_1(0,t) = \vartheta_{1,0}(t)$

DMM jednokapacitného rúrkového výmenníka tepla má tvar lineárneho stavového opisu systému so spojito rozloženými parametrami s nenulovými začiatočnými podmienkami, kde:

- stavová veličina: $\vartheta_1(z,t)$
- vstupné veličiny: $\vartheta_3(t), \vartheta_{1,0}(t)$

Výstupné veličiny sú tie, ktoré sa na procese sledujú a môžu byť definované rôzne.

- výstupná veličina napr.: $\vartheta_1(z,t)$

alebo $\vartheta_1(z=l,t)=\vartheta_{1,n}(t)$

Definovanie časovej konštanty a rýchlosti prúdenia

- DMM po úprave :

$$0 = q_1\rho_1 c_{p1}\frac{\partial \vartheta_1(z,t)}{\partial z}\mathrm{d}z + \alpha_{13}\mathrm{d}A_{13}\left[\vartheta_1(z,t) - \vartheta_3(t)\right] + \frac{\partial\left[\mathrm{d}V_1\rho_1 c_{p1}\vartheta_1(z,t)\right]}{\partial t}$$

$$\mathrm{d}V_1\rho_1 c_{p1}\frac{\partial\left[\vartheta_1(z,t)\right]}{\partial t} + q_1\rho_1 c_{p1}\mathrm{d}z\frac{\partial \vartheta_1(z,t)}{\partial z} = -\alpha_{13}\mathrm{d}A_{13}\vartheta_1(z,t) + \alpha_{13}\mathrm{d}A_{13}\vartheta_3(t)$$

- určenie časovej konštanty po úprave DMM do tvaru s konštantou -1 pred nederivovanou stavovou veličinou:

$$T_1 = \frac{\mathrm{d}V_1\rho_1 c_{p1}}{\alpha_{13}\mathrm{d}A_{13}}, \quad \text{kde} \qquad \mathrm{d}V_1 = S_1\mathrm{d}z = \pi R_1^2\mathrm{d}z = \pi\frac{D_1^2}{4}\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}A_{13} = O_1\mathrm{d}z = 2\pi R_1\mathrm{d}z = \pi D_1\mathrm{d}z$$

- určenie rýchlosti prúdenia:

$$\frac{q_1\rho_1 c_{p1}\mathrm{d}z}{\alpha_{13}\mathrm{d}A_{13}} = \frac{q_1\rho_1 c_{p1}\mathrm{d}z}{\alpha_{13}\mathrm{d}A_{13}}.\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}V_1} = T_1.\frac{q_1\mathrm{d}z}{\mathrm{d}V_1} = T_1.\frac{q_1\mathrm{d}z}{S_1\mathrm{d}z} = T_1.w_1$$

DMM jednokapacitného rúrkového výmenníka tepla po zavedení časovej konštanty a rýchlosti prúdenia:

$$T_1\frac{\partial \vartheta_1(z,t)}{\partial t} + T_1 w_1\frac{\partial \vartheta_1(z,t)}{\partial z} = -\vartheta_1(z,t) + \vartheta_3(t)$$

$$\vartheta_1(z,0) = \vartheta_1^s(z)$$

$$\vartheta_1(0,t) = \vartheta_{1,0}(t)$$

- operátor piestového toku

$$T\frac{\partial}{\partial t}+Tw\frac{\partial}{\partial z}=f$$

- dopravné oneskorenie

$$T_D=\frac{l}{w}$$

Matematický model rovnovážneho stavu (MMRS)

- entalpická bilancia elementu systému s prestupom tepla všeobecne

$$\left\{\begin{array}{l} tepelné\ toky \\ do\ elementu \\ systému \\ vstupujúce \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} tepelné\ toky \\ z\ elementu \\ systému \\ vystupujúce \end{array}\right\}$$

V rovnovážnom stave (v ustálenom stave) nedochádza k akumulácii, t.j. akumulačný člen v bilancii je nulový a v dynamickom stave časovo premenné veličiny sa v rovnovážnom stave stávajú konštantami vzhľadom na čas.

- horúca kvapalina v rovnovážnom stave

$$\dot{Q}_1^s(z) = \dot{Q}_1^s(z + \mathrm{d}z) + \dot{Q}_{13}^s(z)$$

- po dosadení za tepelné toky

$$q_1 \rho_1 c_{p1} \vartheta_1^s(z) = q_1 \rho_1 c_{p1} \left[\vartheta_1^s(z) + \frac{d\vartheta_1^s(z)}{dz} \mathrm{d}z \right] + \alpha_{13} \mathrm{d}A_{13} \left[\vartheta_1^s(z) - \vartheta_3^s \right]$$

- po úpravách a zavedení časovej konštanty a rýchlosti prúdenia

$$T_1 w_1 \frac{\mathrm{d}\vartheta_1^s(z)}{\mathrm{d}z} = -\vartheta_1^s(z) + \vartheta_3^s \qquad \vartheta_1^s(z=0) = \vartheta_{1,0}^s$$

MMRS jednokapacitného rúrkového výmenníka tepla je opísaný lineárnou obyčajnou diferenciálnou rovnicou.

Riešenie rovnovážneho stavu

1. riešením diferenciálnej rovnice opisujúcej rovnovážny stav

2. diskretizáciou

Riešenie rovnovážneho stavu diskretizáciou

Diskretizácia:

1. rozdelenie výmenníka tepla na n-úsekov o dĺžke Δz

$$n = \frac{l}{\Delta z}$$

2. náhrada derivácie v MMRS spätnou diferenciou

$$\frac{d\vartheta_1^s(z)}{dz} \approx \frac{\Delta\vartheta_1^s(z)}{\Delta z} = \frac{\vartheta_1^s(z_i) - \vartheta_1^s(z_{i-1})}{z_i - z_{i-1}} = \frac{\vartheta_{1,i}^s - \vartheta_{1,i-1}^s}{\Delta z}$$

- po dosadení do MMRS dostaneme MMRS pre i-tý úsek:

$$T_1 w_1 \frac{\vartheta_{1,i}^s - \vartheta_{1,i-1}^s}{\Delta z} = -\vartheta_{1,i}^s + \vartheta_3^s \qquad i = 1,\ldots,n$$

- po úprave

$$\left(\frac{T_1 w_1}{\Delta z} + 1\right)\vartheta_{1,i}^s = \frac{T_1 w_1}{\Delta z}\vartheta_{1,i-1}^s + \vartheta_3^s$$

- a po definovaní

$$a_1 = \frac{T_1 w_1}{\Delta z} + 1, \quad b_1 = \frac{T_1 w_1}{\Delta z}$$

- dostaneme MMRS pre i-tý úsek:

$$\vartheta_{1,i}^{s} = \frac{b_1}{a_1}\vartheta_{1,i-1}^{s} + \frac{1}{a_1}\vartheta_3^{s}\ , \qquad i = 1,\ldots,n$$

- a pre *n* úsekov:

$$\vartheta_{1,1}^{s} = \frac{b_1}{a_1}\vartheta_{1,0}^{s} + \frac{1}{a_1}\vartheta_3^{s}$$

$$\vartheta_{1,2}^{s} = \frac{b_1}{a_1}\vartheta_{1,1}^{s} + \frac{1}{a_1}\vartheta_3^{s}$$

$$\vdots$$

$$\vartheta_{1,n}^{s} = \frac{b_1}{a_1}\vartheta_{1,n-1}^{s} + \frac{1}{a_1}\vartheta_3^{s}$$

Sledovanie dynamiky po diskretizácii

- náhrada derivácie podľa z v DMM spätnou diferenciou

$$\frac{\partial \vartheta_1(z,t)}{\partial z} \approx \frac{\Delta \vartheta_1(z,t)}{\Delta z} = \frac{\vartheta_1(z_i,t) - \vartheta_1(z_{i-1},t)}{z_i - z_{i-1}} = \frac{\vartheta_{1,i}(t) - \vartheta_{1,i-1}(t)}{\Delta z}$$

- po dosadení do DMM dostaneme pre i-tý úsek:

$$T_1 \frac{\mathrm{d}\vartheta_{1,i}(t)}{\mathrm{d}t} + T_1 w_1 \frac{\vartheta_{1,i}(t) - \vartheta_{1,i-1}(t)}{\Delta z} = -\vartheta_{1,i}(t) + \vartheta_3(t) \qquad i = 1,\dots,n$$

$$\vartheta_{1,i}(t=0) = \vartheta_{1,i}(0) = \vartheta_{1,i}^s$$

- po použití definovaných konštánt a_1, b_1:

$$T_1 \frac{\mathrm{d}\vartheta_{1,i}(t)}{\mathrm{d}t} = -a_1\vartheta_{1,i}(t) + b_1\vartheta_{1,i-1}(t) + \vartheta_3(t) \qquad i = 1,\dots,n$$

$$\vartheta_{1,i}(t=0) = \vartheta_{1,i}(0) = \vartheta_{1,i}^{s}$$

- po úprave:

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta_{1,i}(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{a_1}{T_1}\vartheta_{1,i}(t) + \frac{b_1}{T_1}\vartheta_{1,i-1}(t) + \frac{1}{T_1}\vartheta_3(t) \qquad i = 1,\dots,n$$

$$\vartheta_{1,i}(t=0) = \vartheta_{1,i}(0) = \vartheta_{1,i}^{s}$$

Simulácia dynamických vlastností po úsekoch

- definujeme veličiny pre i-tý úsek:

vstupné: $\vartheta_{1,i-1}(t),\ \vartheta_3(t)$

stavová: $\vartheta_{1,i}(t)$

výstupná: $\vartheta_{1,i}(t)$

matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ stavového opisu

$$\boldsymbol{A} = -\frac{a_1}{T_1}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \dfrac{b_1}{T_1} & \dfrac{1}{T_1} \end{bmatrix}$$

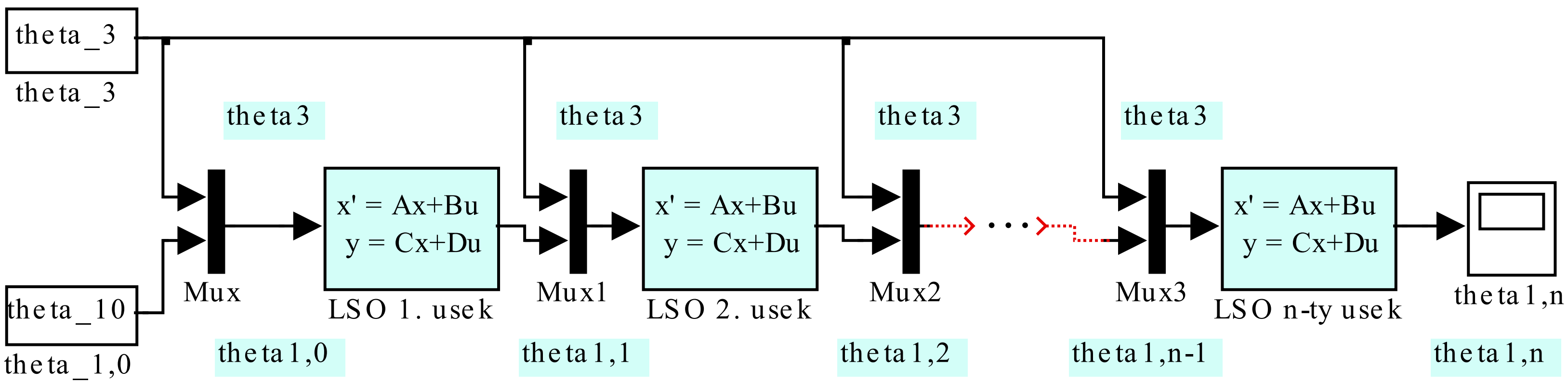
matice $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ stavového opisu pre zvolenú výstupnú veličinu

$$\boldsymbol{C} = 1, \quad \boldsymbol{D} = 0$$

a začiatočná podmienka je nenulová

$$\vartheta_{1,i}(t = 0) = \vartheta_{1,i}(0) = \vartheta_{1,i}^{s}$$

Simulácia dynamických vlastností po úsekoch



Simulácia dynamických vlastností výmenníka ako celku po diskretizácii

- definujeme veličiny pre celý výmenník:

vstupné: $\vartheta_{1,0}(t), \vartheta_3(t)$

stavové: $\vartheta_{1,i}(t), \quad i = 1,\ldots,n$

výstupné: $\vartheta_{1,i}(t), \quad i = 1,\ldots,n$

matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ stavového opisu

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -\dfrac{a_1}{T_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dfrac{b_1}{T_1} & -\dfrac{a_1}{T_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dfrac{b_1}{T_1} & -\dfrac{a_1}{T_1} & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \dfrac{b_1}{T_1} & -\dfrac{a_1}{T_1} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \dfrac{b_1}{T_1} & \dfrac{1}{T_1} \\ 0 & \dfrac{1}{T_1} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \dfrac{1}{T_1} \end{pmatrix}$$

matice $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ stavového opisu pre zvolené výstupné veličiny

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a začiatočné podmienky sú nenulové $\vartheta_{1,i}(t=0) = \vartheta_{1,i}^{s}, \quad i = 1,\ldots,n$

Simulácia dynamických vlastností ako celku