PROCESY
S PRESTUPOM TEPLA

- systémy so sústredenými parametrami
  - procesy rozmerovo malé
  - kvapaliny, medzi ktorými dochádza k prestupu tepla sú dokonale premiešavané
  - veličiny v dynamickom stave sa menia len čase

- systémy so spojito rozloženými parametrami
  - procesy rozmerovo veľké
  - kvapaliny prúdia ideálnym piestovým tokom
  - veličiny v dynamickom stave sa menia aj v čase aj v priestore

SYSTÉMY SO SÚSTREDENÝMI PARAMETRAMI

REKUPERAČNÝ VÝMENNÍK TEPLA

Dynamický matematický model (DMM)

Zjednodušujúce predpoklady pre odvodenie DMM rekuperačného výmenníka tepla:

- všetky prietoky sú konštantné $\Rightarrow$ nedocháda k akumulácii látky a netreba robiť materiálovú bilanciu
- tlak v systéme je konštantný $\Rightarrow$ zmena entalpie = zmene tepla

Entalpická bilancia prietočného systému s prestupom tepla všeobecne

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{tepelné toky} \\ \textit{do systému} \\ \textit{vstupujúce} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \textit{tepelné toky} \\ \textit{zo systému} \\ \textit{vystupujúce} \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l} \textit{rýchlosť akumulácie} \\ \textit{tepla} \\ \textit{v systéme} \end{array}\right\}$$

Ďalej zanedbáme tepelnú kapacitu vonkajších stien výmenníka a straty tepla do okolia.
DMM:

- horúca kvapalina

$$\dot{Q}_{v1}(t) = \dot{Q}_1(t) + \dot{Q}_{12}(t) + \frac{\mathrm{d}Q_1(t)}{\mathrm{d}t} \qquad Q_1(t_0) = Q_{10}$$

- stena oddeľujúca horúcu a studenú kvapalinu

$$\dot{Q}_{12}(t) = \dot{Q}_{23}(t) + \frac{\mathrm{d}Q_2(t)}{\mathrm{d}t} \qquad Q_2(t_0) = Q_{20}$$

- studená kvapalina

$$\dot{Q}_{v3}(t) + \dot{Q}_{23}(t) = \dot{Q}_3(t) + \frac{\mathrm{d}Q_3(t)}{\mathrm{d}t} \qquad Q_3(t_0) = Q_{30}$$

- ďalšie predpoklady:
  - konštantné parametre: hustoty, špecifické tepelné kapacity, koeficienty prestupu tepla, plochy prestu tepla, objemy
  - rovnaké referenčné teploty pre všetky členy bilancií

- po vyjadrení:

$$\dot{Q}_{v1}(t) = \dot{m}_1 c_{p1} \vartheta_{v1}(t) = q_1 \rho_1 c_{p1} \vartheta_{v1}(t), \quad \dot{Q}_{v3}(t) = \dot{m}_3 c_{p3} \vartheta_{v3}(t) = q_3 \rho_3 c_{p3} \vartheta_{v3}(t)$$

$$\dot{Q}_1(t) = \dot{m}_1 c_{p1} \vartheta_1(t) = q_1 \rho_1 c_{p1} \vartheta_1(t), \quad \dot{Q}_3(t) = \dot{m}_3 c_{p3} \vartheta_3(t) = q_3 \rho_3 c_{p3} \vartheta_3(t)$$

$$\dot{Q}_{12}(t) = \alpha_{12} A_{12} \left[\vartheta_1(t) - \vartheta_2(t) \right], \quad \dot{Q}_{23}(t) = \alpha_{23} A_{23} \left[\vartheta_2(t) - \vartheta_3(t) \right],$$

$$Q_i(t) = m_i c_{pi} \vartheta_i(t) = V_i \rho_i c_{pi} \vartheta_i(t), \quad i = 1,2,3$$

- DMM rekuperačného výmenníka tepla

$$q_1\rho_1 c_{p1}\vartheta_{v1}(t) = q_1\rho_1 c_{p1}\vartheta_1(t) + \alpha_{12}A_{12}\left[\vartheta_1(t) - \vartheta_2(t)\right] + \frac{\mathrm{d}\left[V_1\rho_1 c_{p1}\vartheta_1(t)\right]}{\mathrm{d}t}$$

$$\vartheta_1(t_0) = \vartheta_{10}$$

$$\alpha_{12}A_{12}\left[\vartheta_1(t) - \vartheta_2(t)\right] = \alpha_{23}A_{23}\left[\vartheta_2(t) - \vartheta_3(t)\right] + \frac{\mathrm{d}\left[V_2\rho_2 c_{p2}\vartheta_2(t)\right]}{\mathrm{d}t}$$

$$\vartheta_2(t_0) = \vartheta_{20}$$

$$q_3\rho_3 c_{p3}\vartheta_{v3}(t) + \alpha_{23}A_{23}\left[\vartheta_2(t) - \vartheta_3(t)\right] = q_3\rho_3 c_{p3}\vartheta_3(t) + \frac{\mathrm{d}\left[V_3\rho_3 c_{p3}\vartheta_3(t)\right]}{\mathrm{d}t}$$

$$\vartheta_3(t_0) = \vartheta_{30}$$

DMM rekuperačného tepla má tvar lineárneho stavového opisu s nenulovými začiatočnými podmienkami, kde:

- stavové veličiny: $\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \vartheta_3(t)$
- vstupné veličiny: $\vartheta_{v1}(t), \vartheta_{v3}(t)$

Výstupné veličiny sú tie, ktoré sa na procese sledujú a môžu byť definované rôzne.

- výstupné veličiny napr.: $\vartheta_1(t), \vartheta_3(t)$

- definovanie časových konštánt a zosilnení (po úprave rovníc DMM do tvaru s konštantou 1 pred príslušnou nederivovanou stavovou veličinou):

$$T_1 = \frac{V_1 \rho_1 c_{p1}}{q_1 \rho_1 c_{p1} + \alpha_{12} A_{12}}$$

$$T_2 = \frac{V_2 \rho_2 c_{p2}}{\alpha_{12} A_{12} + \alpha_{23} A_{23}}$$

$$T_3 = \frac{V_3 \rho_3 c_{p3}}{q_3 \rho_3 c_{p3} + \alpha_{23} A_{23}}$$

$$Z_{1v1} = \frac{q_1 \rho_1 c_{p1}}{q_1 \rho_1 c_{p1} + \alpha_{12} A_{12}} \qquad Z_{12} = \frac{\alpha_{12} A_{12}}{q_1 \rho_1 c_{p1} + \alpha_{12} A_{12}}$$

$$Z_{21} = \frac{\alpha_{12} A_{12}}{\alpha_{12} A_{12} + \alpha_{23} A_{23}} \qquad Z_{23} = \frac{\alpha_{23} A_{23}}{\alpha_{12} A_{12} + \alpha_{23} A_{23}}$$

$$Z_{3v3} = \frac{q_3 \rho_3 c_{p3}}{q_3 \rho_3 c_{p3} + \alpha_{23} A_{23}} \qquad Z_{32} = \frac{\alpha_{23} A_{23}}{q_3 \rho_3 c_{p3} + \alpha_{23} A_{23}}$$

- DMM rekuperačného výmenníka tepla po zavedení časových konštánt a zosilení

$$Z_{1v1}\vartheta_{v1}(t) = \vartheta_1(t) - Z_{12}\vartheta_2(t) + T_1 \frac{\mathrm{d}\vartheta_1(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \vartheta_1(t_0) = \vartheta_{10}$$

$$Z_{21}\vartheta_1(t) = \vartheta_2(t) - Z_{23}\vartheta_3(t) + T_2 \frac{\mathrm{d}\vartheta_2(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \vartheta_2(t_0) = \vartheta_{20}$$

$$Z_{3v3}\vartheta_{v3}(t) + Z_{32}\vartheta_2(t) = \vartheta_3(t) + T_3 \frac{\mathrm{d}\vartheta_3(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \vartheta_3(t_0) = \vartheta_{30}$$

- DMM vo forme lineárneho stavového opisu s deriváciami vľavo a nenulovými začiatočnými podmienkami

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta_1(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{T_1}\vartheta_1(t) + \frac{Z_{12}}{T_1}\vartheta_2(t) + \frac{Z_{1v1}}{T_1}\vartheta_{v1}(t) \qquad \vartheta_1(t_0) = \vartheta_{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta_2(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{T_2}\vartheta_2(t) + \frac{Z_{21}}{T_2}\vartheta_1(t) + \frac{Z_{23}}{T_2}\vartheta_3(t) \qquad \vartheta_2(t_0) = \vartheta_{20}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta_3(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{T_3}\vartheta_3(t) + \frac{Z_{32}}{T_3}\vartheta_2(t) + \frac{Z_{3v3}}{T_3}\vartheta_{v3}(t) \qquad \vartheta_3(t_0) = \vartheta_{30}$$

Tieto rovnice tvoria rovnicu stavu (dynamiky), kde matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ stavového opisu

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{T_1} & \dfrac{Z_{12}}{T_1} & 0 \\ \dfrac{Z_{21}}{T_2} & -\dfrac{1}{T_2} & \dfrac{Z_{23}}{T_2} \\ 0 & \dfrac{Z_{32}}{T3} & -\dfrac{1}{T_3} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \dfrac{Z_{1v1}}{T_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{Z_{3v3}}{T3} \end{pmatrix}$$

matice $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ stavového opisu pre zvolené výstupné veličiny

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a začiatočné podmienky sú nenulové.

Matematický model rovnovážneho stavu (MMRS)

- entalpická bilancia prietočného systému s prestupom tepla všeobecne

$$\begin{Bmatrix} \textit{tepelné toky} \\ \textit{do systému} \\ \textit{vstupujúce} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \textit{tepelné toky} \\ \textit{zo systému} \\ \textit{vystupujúce} \end{Bmatrix}$$

V rovnovážnom stave (v ustálenom stave) nedochádza k akumulácii, t.j. akumulačný člen v bilancii je nulový.

$$q_1 \rho_1 c_{p1} \vartheta_{v1}^s(t) = q_1 \rho_1 c_{p1} \vartheta_1^s + \alpha_{12} A_{12} \left(\vartheta_1^s - \vartheta_2^s \right)$$

$$\alpha_{12} A_{12} \left(\vartheta_1^s - \vartheta_2^s \right) = \alpha_{23} A_{23} \left(\vartheta_2^s - \vartheta_3^s \right)$$

$$q_3 \rho_3 c_{p3} \vartheta_{v3}^s + \alpha_{23} A_{23} \left(\vartheta_2^s - \vartheta_3^s \right) = q_3 \rho_3 c_{p3} \vartheta_3^s$$

- po zavedení časových konštánt a zosilnení

$$Z_{1v1}\vartheta_{v1}^{s} = \vartheta_{1}^{s} - Z_{12}\vartheta_{2}^{s}$$

$$Z_{21}\vartheta_{1}^{s} = \vartheta_{2}^{s} - Z_{23}\vartheta_{3}^{s}$$

$$Z_{3v3}\vartheta_{v3}^{s} + Z_{32}\vartheta_{2}^{s} = \vartheta_{3}^{s}$$

- vzťahy pre výpočet teplôt výstupných prúdov a teploty steny v rovnovážnom stave

$$\vartheta_{1}^{s} + Z_{12}\vartheta_{2}^{s} \qquad = Z_{1v1}\vartheta_{v1}^{s}$$

$$Z_{21}\vartheta_{1}^{s} - \quad \vartheta_{2}^{s} + Z_{23}\vartheta_{3}^{s} = 0$$

$$Z_{32}\vartheta_{2}^{s} + \quad \vartheta_{3}^{s} = Z_{3v3}\vartheta_{v3}^{s}$$

Odchýlkový dynamický matematický model

Postup pri odvodení

- od DMM odčítame MMRS (za pracovný bod teda považujeme rovnovážny stav)

$$Z_{1v1}\vartheta_{v1}(t) - Z_{1v1}\vartheta_{v1}^{s} = \vartheta_1(t) - \vartheta_1^{s} - Z_{12}\vartheta_2(t) + Z_{12}\vartheta_2^{s} + T_1\frac{\mathrm{d}\vartheta_1(t)}{\mathrm{d}t} - T_1\frac{\mathrm{d}\vartheta_1^{s}}{\mathrm{d}t}$$

$$Z_{21}\vartheta_1(t) - Z_{21}\vartheta_1^{s} = \vartheta_2(t) - \vartheta_2^{s} - Z_{23}\vartheta_3(t) + Z_{23}\vartheta_3^{s} + T_2\frac{\mathrm{d}\vartheta_2(t)}{\mathrm{d}t} - T_2\frac{\mathrm{d}\vartheta_2^{s}}{\mathrm{d}t}$$

$$Z_{3v3}\vartheta_{v3}(t) - Z_{3v3}\vartheta_{v3}^{s} + Z_{32}\vartheta_2(t) - Z_{32}\vartheta_2^{s} = \vartheta_3(t) - \vartheta_3^{s} + T_3\frac{\mathrm{d}\vartheta_3(t)}{\mathrm{d}t} - T_3\frac{\mathrm{d}\vartheta_3^{s}}{\mathrm{d}t}$$

- definujeme odchýlkové veličiny:

vstupné: $u_i(t) = \vartheta_{vi}(t) - \vartheta_{vi}^s,\ i = 1,3$

stavové: $x_i(t) = \vartheta_i(t) - \vartheta_i^s,\ i = 1,2,3$

výstupné: napr.

$$y_1(t) = x_1(t)$$
$$y_2(t) = x_3(t)$$

- použijeme definované odchýlkové veličiny, urobíme úpravy a dostaneme:

$$Z_{1v1}u_1(t) = x_1(t) - Z_{12}x_2(t) + T_1 \frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} \qquad x_1(t_0) = \vartheta_1(t_0) - \vartheta_1^s = \vartheta_1^s - \vartheta_1^s = 0$$

$$Z_{21}x_1(t) = x_2(t) - Z_{23}x_3(t) + T_2 \frac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} \qquad x_2(t_0) = 0$$

$$Z_{3v3}u_2(t) + Z_{32}x_2(t) = x_3(t) + T_3 \frac{\mathrm{d}x_3(t)}{\mathrm{d}t} \qquad x_3(t_0) = 0$$

- Štandardný tvar linearizovaného matematického modelu – rovnica dynamiky

$$\frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{T_1}x_1(t) + \frac{Z_{12}}{T_1}x_2(t) + \frac{Z_{1v1}}{T_1}u_1(t) \qquad x_1(t_0) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{T_2}x_2(t) + \frac{Z_{21}}{T_2}x_1(t) + \frac{Z_{23}}{T_2}x_3(t) \qquad x_2(t_0) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}x_3(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{T_3}x_3(t) + \frac{Z_{32}}{T_3}x_2(t) + \frac{Z_{3v3}}{T_3}u_2(t) \qquad x_3(t_0) = 0$$

matice ***A***, ***B*** stavového opisu

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{T_1} & \dfrac{Z_{12}}{T_1} & 0 \\ \dfrac{Z_{21}}{T_2} & -\dfrac{1}{T_2} & \dfrac{Z_{23}}{T_2} \\ 0 & \dfrac{Z_{32}}{T3} & -\dfrac{1}{T_3} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \dfrac{Z_{1v1}}{T_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{Z_{3v3}}{T3} \end{pmatrix}$$

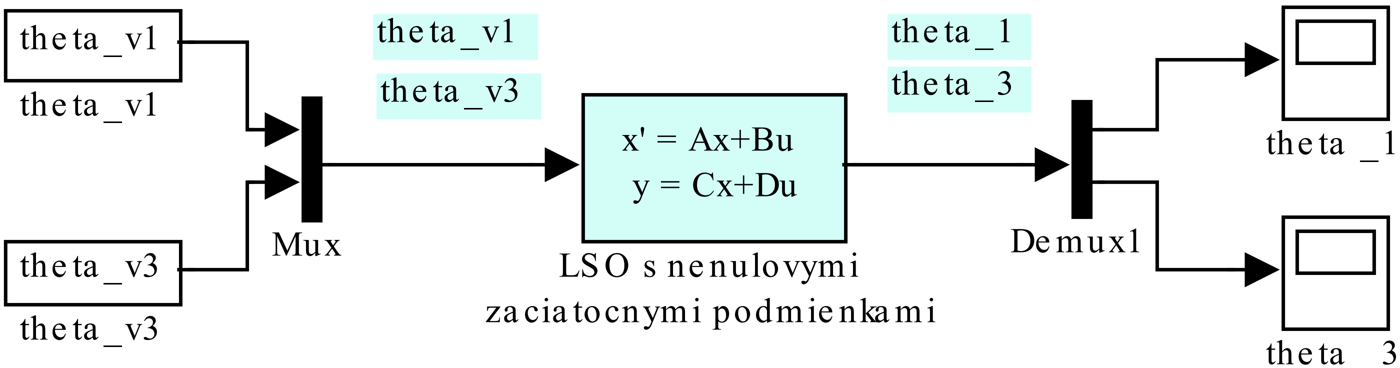
matice ***C***, ***D*** stavového opisu pre zvolené výstupné veličiny

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

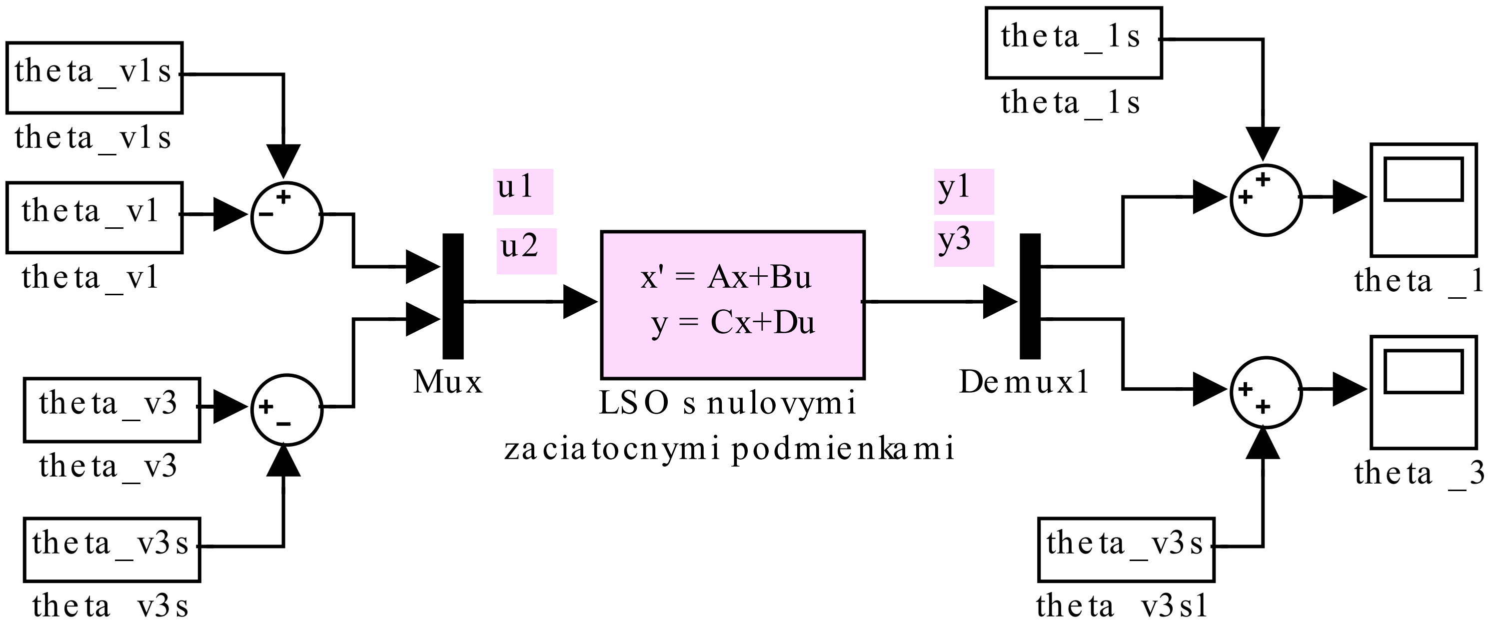
a začiatočné podmienky sú nulové.

- Dunamický systém opísaný lineárnym stavovým opisom s nenulovými začiatočnými podmienkami možno jednoducho transformovať na lineárny stavový opis s nulovými začiatočnými podmienkami definovaním odchýlkových veličín a náhradou stavových, vstupných a výstupných veličín v pôvodnom modeli definovanými odchýlkovými veličinami. Matice stavového opisu sa tým nezmenia, zmenia sa len nenulové začiatočné podmienky na nulové.

Simulácia pomocou lineárneho matematického modelu – LSO s nenulovými začiatočnými podmienkami



Simulácia pomocou lineárneho matematického modelu – LSO s nulovými začiatočnými podmienkami



Simulácia pomocou lineárneho matematického modelu – prenosy