Všeobecný vstupno-výstupný opis lineárneho dynamického systému vo forme prenosu

- Odvodenie zo stavového opisu

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = 0$$
$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)$$

- Laplaceova transformácia

$$s\boldsymbol{X}(s) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$$
$$\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{U}(s)$$

- úpravy

$$\boldsymbol{X}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$$
$$\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{U}(s)$$

$$\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D} = \frac{\boldsymbol{C}\,\mathrm{adj}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{B}}{\det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})} + \boldsymbol{D} =$$

$$= \frac{\boldsymbol{C}\,\mathrm{adj}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{B} + \det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{D}}{\det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})}$$

$$\boldsymbol{G}(s) = \frac{\text{matica}(r \times m)}{\text{polynóm } n - \text{tého stupna}} = \begin{pmatrix} G_{y_1u_1} & \cdots & G_{y_1u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{y_ru_1} & \cdots & G_{y_ru_m} \end{pmatrix}$$

- pre $\boldsymbol{D}$=0

$$\boldsymbol{G}(s) = \frac{\boldsymbol{C}\,\mathrm{adj}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{B}}{\det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})}$$

PRÍKLAD

Určite prenos dynamického systému, kde:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

RIEŠENIE

$$\det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = s^2 + 5s + 6$$

$$\operatorname{adj}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} s+4 & 1 \\ -2 & s+1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}\operatorname{adj}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} s+4 & 1 \\ -2 & s+1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}\operatorname{adj}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} s+4 & 3 \\ -2 & 3s+3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{G}(s) = \frac{\begin{pmatrix} s+4 & 3 \\ -2 & 3s+3 \end{pmatrix}}{s^2+5s+6}$$

$$\boldsymbol{G}_{y_1u_1}(s) = \frac{s+4}{s^2+5s+6}$$

$$\boldsymbol{G}_{y_2u_1}(s) = \frac{-2}{s^2+5s+6}$$

$$\boldsymbol{G}_{y_1u_2}(s) = \frac{3}{s^2+5s+6}$$

$$\boldsymbol{G}_{y_2u_2}(s) = \frac{3s+3}{s^2+5s+6}$$

– MATLAB: ss2tf(A,B,C,D,iu)

Vstupno-výstupný opis lineárneho dynamického systému s 1 vstupom a 1 výstupom vo forme prenosu

- systém s 1 vstupom a 1 výstupom

$$\boldsymbol{G}(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{\text{polynóm}}{\text{polynóm } n-\text{tého stupna}}=$$

$$=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

Fyzikálna realizovateľnosť

- podmienka fyzikálnej realizovateľnosti: $m \le n$
- rýdzi systém: $m \le n$
- striktne rýdzi systém: $m < n$

□ DôKAZ PODMIENKY FYZIKÁLNEJ REALIZOVATEĽNOSTI

Nepriamo: predpokladáme, že $m = n+1$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_{n+1}s^{n+1} + b_n s^n + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

Sledujeme odozvu systému na vstup v tvare jednotkového skoku (prechodovú charakteristiku) v okamihu jeho realizácie:

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = \lim_{s\to\infty} s\,\frac{b_{n+1}s^{n+1} + b_n s^n + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}\,\frac{1}{s} =$$

$$= \lim_{s\to\infty} \frac{b_{n+1}s + b_n + \cdots + \dfrac{b_0}{s^n}}{a_n + \dfrac{a_{n-1}}{s} + \cdots + \dfrac{a_0}{s^n}} = \infty$$

Fyzikálne realizovateľný systém na konečnú zmenu vstupnej veličiny nemôže okamžite reagovať nekonečne veľkou zmenou výstupnej veličiny.

Rád a relatívny rád

- rád: n
- relatívny rád: $n - m$

Priebeh prechodovej charakteristiky systému 1. rádu

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_1 s + a_0}$$

- smernica dotyčnice k PCH v jej začiatku:

$$y'(0) = \lim_{s\to\infty} s^2 Y(s) = \lim_{s\to\infty} s^2 \frac{b_0}{a_1 s + a_0} \frac{1}{s} = \frac{b_0}{a_1} = konšt.$$

Prechodová charakteristika systému 1. rádu nemá (v začiatku) inflexný bod.

Priebeh prechodovej charakteristiky systému relatívneho 1. rádu

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_{n-1}s^{n-1}+b_{n-2}s^{n-2}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

- smernica dotyčnice k PCH v jej začiatku:

$$y'(0)=\lim_{s\to\infty} s^2 Y(s)=\lim_{s\to\infty} s^2\frac{b_{n-1}s^{n-1}+b_{n-2}s^{n-2}+\cdots+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_0}\frac{1}{s}=$$

$$=\frac{b_{n-1}}{a_n}=konšt.$$

Prechodová charakteristika systému relatívneho 1. rádu nemá v začiatku inflexný bod.

Priebeh prechodovej charakteristiky systému 2. rádu

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

- smernica dotyčnice k PCH v jej začiatku:

$$y'(0) = \lim_{s \to \infty} s^2 Y(s) = \lim_{s \to \infty} s^2 \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \frac{1}{s} = 0$$

Prechodová charakteristika systému 2. rádu má v začiatku inflexný bod.

Analogicky to platí aj pre systémy vyššieho rádu než 2.

Priebeh prechodovej charakteristiky systému relatívneho 2. rádu

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_{n-2}s^{n-2} + b_{n-3}s^{n-3} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

- smernica dotyčnice k PCH v jej začiatku:

$$y'(0) = \lim_{s\to\infty} s^2 Y(s) = \lim_{s\to\infty} s^2 \frac{b_{n-2}s^{n-2} + b_{n-3}s^{n-3} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0} \frac{1}{s} = 0$$

Prechodová charakteristika systému relatívneho 2. rádu má v začiatku inflexný bod.

Analogicky to platí aj pre systémy vyššieho relatívneho rádu než 2.

Vstupno-výstupný opis lineárneho dynamického systému s 1 vstupom a 1 výstupom vo forme vstupno-výstupnej rovnice

- Odvodenie z prenosu

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

- úpravy

$$Y(s)\left(a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0\right)=U(s)\left(b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0\right)$$

- spätná Laplaceova transformácia

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) =$$
$$= b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 u'(t) + b_0 u(t)$$

- *n* začiatočných podmienok

$$y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0$$

Vstupno-výstupný opis lineárneho dynamického systému s 1 vstupom a 1 výstupom vo forme prenosu

- Odvodenie zo vstupno-výstupnej diferenciálnej rovnice

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) =$$
$$= b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 u'(t) + b_0 u(t)$$

$$y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0$$

- Laplaceova transformácia a úpravy

$$Y(s)\left(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0\right) = U(s)\left(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0\right)$$

- prenos

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

Stavový opis lineárneho dynamického systému - odvodenie z VV CDR

- vstupno-výstupná diferenciálna rovnica systému n-tého rádu

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) =$$
$$= b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 u'(t) + b_0 u(t)$$

- n začiatočných podmienok

$$y(0) = y_0, y'(0) = y_1, \cdots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$$

- úprava VVDCR - jej vydelenie koeficientom a_n

$$y^{(n)}(t) + \tilde{a}_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + \tilde{a}_1 y'(t) + \tilde{a}_0 y(t) =$$
$$= \tilde{b}_m u^{(m)}(t) + \tilde{b}_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \cdots + \tilde{b}_1 u'(t) + \tilde{b}_0 u(t)$$

- definovanie *n* stavových veličín

$$
\begin{array}{lllll}
y, u: & \xi & = & & x_n \\
y', u': & \xi' & = & x_n' = & x_{n-1} \\
\vdots & & & & \\
y^{(m-1)}, u^{(m-1)}: & \xi^{(m-1)} & = & x_{n-m+2}' = & x_{n-m+1} \\
y^{(m)}, u^{(m)}: & \xi^{(m)} & = & x_{n-m+1}' = & x_{n-m} \\
y^{(m+1)}: & \xi^{(m+1)} & = & x_{n-m}' = & x_{n-m-1} \\
\vdots & & & & \\
y^{(n-1)}: & \xi^{(n-1)} & = & x_2' = & x_1
\end{array}
$$

- vyjadrenie *n*-tej derivácie výstupu

$$y^{(n)}: \qquad \xi^{(n)} = x_1'$$

- definovanie pomocnej vstupnej veličiny U a pomocnej výstupnej veličiny Y a rozdelenie VV DCR na 2 časti

$$y^{(n)}(t)+\tilde{a}_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+\tilde{a}_1 y'(t)+\tilde{a}_0 y(t)=U$$

$$Y=\tilde{b}_m u^{(m)}(t)+\tilde{b}_{m-1}u^{m-1}(t)+\cdots+\tilde{b}_1 u'(t)+\tilde{b}_0 u(t)$$

- vytvorenie rovnice stavu (dynamiky)

$$\begin{aligned} y^{(n)} = x_1' &= -\tilde{a}_{n-1}x_1 - \cdots - \tilde{a}_1 x_{n-1} - \tilde{a}_0 x_n + U \\ x_2' &= x_1 \\ &\vdots \\ x_n' &= x_{n-1} \end{aligned}$$

- matice ***A***, ***B***

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -\tilde{a}_{n-1} & -\tilde{a}_{n-2} & \cdots & -\tilde{a}_1 & -\tilde{a}_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- vytvorenie rovnice výstupu

$$Y = \tilde{b}_m x_{n-m} + \tilde{b}_{m-1} x_{n-m+1} + \cdots + \tilde{b}_1 x_{n-1} + \tilde{b}_0 x_n$$

- matice $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \tilde{b}_m & \cdots & \tilde{b}_0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{D} = 0$$

- začiatočné podmienky

$$\begin{aligned} x_1(0) &= \quad y^{(n-1)}(0) = y_{n-1} \\ x_2(0) &= \quad y^{(n-2)}(0) = y_{n-2} \\ &\vdots \\ x_n(0) &= \quad y(0) = y_0 \end{aligned}$$

PRÍKLAD

Určite stavový opis dynamického systému opísaného vstupno-výstupnou diferenciálnou rovnicou:

$$2y'''(t)+6y''(t)+8y'(t)+4y(t)=2u'(t)+10u(t)$$

so začiatočnými podmienkami

$$y(0)=2,\ y'(0)=0,\ y''(0)=0.$$

RIEŠENIE

- úprava VVDCR

$$y'''(t)+3y''(t)+4y'(t)+2y(t)=u'(t)+5u(t)$$

- definovanie 3 stavových veličín

$$y,u: \quad \xi = x_3$$

$$y',u': \quad \xi' = x_3' = x_2$$

$$y'': \quad \xi'' = x_2' = x_1$$

- vyjadrenie 3-tej derivácie výstupu

$$y''': \quad \xi''' = x_1'$$

- definovanie pomocnej vstupnej veličiny U a pomocnej výstupnej veličiny Y a rozdelenie VV DCR na 2 časti

$$y'''(t) + 3y''(t) + 4y'(t) + 2y(t) = U$$

$$Y = u'(t) + 5u(t)$$

- vytvorenie rovnice stavu

$$y'''(t) = x_1' = -3x_1 - 4x_2 - 2x_3 + U \qquad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2' = x_1$$

$$x_3' = x_2$$

- vytvorenie rovnice výstupu

$$Y = u' + 5u = x_2 + 5x_3 \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = 0$$

- začiatočné podmienky

$$x_1(0) = y''(0) = 0 \qquad x_2(0) = y'(0) = 0 \qquad x_3(0) = y(0) = 2$$