Dynamika procesov

doc. Ing. Monika Bakošová, CS.
B-C blok, m.č. 664
monika.bakosova@stuba.sk
www.kirp.chtf.stuba.sk

Úvod do dynamiky procesov

- Proces
- Dynamika
- Cieľ sledovania dynamiky procesov
  - spoznanie neznámeho procesu
  - lepšie spoznanie známeho procesu
- Predmet sledovania
  - kvantitatívne zmeny veličín

- Prostriedok sledovania
  - reálny objekt (RO)
  - matematický model (MM)

reálny objekt reálny systém

SYSTÉM

matematický model abstraktný systém

- Reálny objekt (RO)
  - pozorovania
  - experimenty

- Matematický model (MM)
  - simulácie

- Definícia MM
  - vo vzťahu k veličinám
  - vo vzťahu k simulácii
- Typy matematických modelov
  - algebraické rovnice (AR)
  - diferenciálne rovnice (DCR)
  - diferenčné rovnice (DČR)
  - integrálne rovnice (IR)
  - pravdepodobnostné vzťahy (PV)

- Dôvody modelovania
  - sledovanie dynamiky bez experimentov
  - hľadanie optimálnych začiatočných a pracovných podmienok
  - sledovanie nebezpečných situácii
  - hľadanie poruchových miest
  - návrh riadiacich systémov
  - trénovanie obsluhy

Veličiny procesov

• Vstupné		
– riadiace (akčné)	– merateľné	– deterministické
– poruchové	– merateľné	– deterministické
	nemerateľné	stochastické
• Stavové	– merateľné	
	nemerateľné	
• Výstupné	– merateľné	

Prístupy k modelovaniu

- Deterministický
  - výhody
  - nevýhody
- Experimentálno-štatistický
  - výhody
  - nevýhody

Klasifikácia MM

- teoretické, matematicko-analytické
- empirické, experimentálne
- teoreticko-empirické

Klasifikácia systémov

- dynamický, statický
- spojitý, diskrétny
- so sústredenými parametrami, s rozloženými parametrami (diskrétne, spojito)
- stacionárny, nestacionárny
- lineárny, nelineárny
- deterministický, stochastický

Matematický opis dynamického systému

- stavový opis
- vstupno-výstupný opis
  - vstupno-výstupná DCR
  - prenos

Všeobecný stavový opis lineárneho dynamického systému

- Časovo variantný systém - nestacionárny

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = x_0$$
$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u}(t)$$

- Časovo invariantný systém - stacionárny

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = x_0$$
$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A} : (n \times n) \quad \boldsymbol{B} : (n \times m)$$
$$\boldsymbol{C} : (r \times n) \quad \boldsymbol{D} : (r \times m)$$

- Rovnovážny stav

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^S + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}^S = 0$$

- Stabilita lineárneho dynamického systému opísaného stavovým opisom
  - stabilné vlastné čísla $\boldsymbol{A}(t)$ alebo $\boldsymbol{A}$

- Výpočet vlastných čísel
  - riešenie rovnice

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0$$

  - MATLAB: eig(A)

PRÍKLAD

Zistite, či je stabilný dynamický systém:

$$x_1' = -x_1 + x_2 + u, \quad x_1(0) = 0$$

$$x_2' = -2x_1 - x_2, \quad x_2(0) = 0$$

$$y = x_1$$

RIEŠENIE

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_{1,2} = -1 \pm \frac{\sqrt{8}}{2} i$$

Dynamický systém je stabilný.

Všeobecný stavový opis nelineárneho dynamického systému

- Časovo variantný systém

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \boldsymbol{f}\big(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)\big), \quad \boldsymbol{x}(0) = x_0$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t))$$

- Časovo invariantný systém

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)), \quad \boldsymbol{x}(0) = x_0$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t))$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_r \end{pmatrix}$$

- Rovnovážny stav

$$\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}^s, \boldsymbol{u}^s\right) = 0$$

- Stabilita nelineárneho dynamického systému opísaného stavovým opisom
  - stabilné vlastné čísla $\boldsymbol{J}$

$$J = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^s, \boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^s}$$

PRÍKLAD

Zistite, či je stabilný dynamický systém:

$$x_1' = -3x_1^2 + 2x_2, \quad x_1(0) = 1$$
$$x_2' = 2x_1 - 4x_2, \quad x_2(0) = 1$$
$$y = x_1 + x_2$$

RIEŠENIE

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} -6x_1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

rovnovážny stav: $\begin{aligned} 0 &= -3(x_1^s)^2 + 2x_2^s \\ 0 &= 2x_1^s - 4x_2^s \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad$ 2 rovnovážne stavy :

1. $x_1^{s1} = 0; \quad x_2^{s1} = 0$
2. $x_1^{s2} = \frac{1}{6}; \quad x_2^{s2} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow$

$$\boldsymbol{J}^{s1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 0{,}8284, \quad \lambda_2 = -4{,}8284$$

$$\boldsymbol{J}^{s2} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = -0{,}7639, \quad \lambda_2 = -5{,}2361$$

Dynamický systém je v okolí 1. rovnovážneho stavu nestabilný a v okolí 2. rovnovážneho stavu stabilný.